VISIT…

Насадок Борда. Рассмотрим сосуд с вертикальными стенками, который заполнен жидкостью плотности ρ и в который вставлен насадок Борда с поперечным сечением произвольной формы и площади A (см. рис. 19); пусть давление на уровне насадка равно p. Мы предположим, что срыв течения [1]) с насадка происходит у его внутреннего края и что скорость струи, вытекающей из насадка, асимптотически приближается к постоянному значению v, которое представляет собой постоянную скорость на свободной линии тока, ограничивающей струю. Пусть A^* — асимптотическое поперечное сечение струи; тогда, по определению, A^*/A есть коэффициент сжатия. Мы подсчитаем его следующим образом.

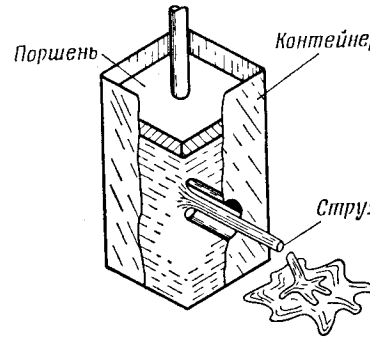


Рис. 19. Истечение из насадка Борда.

Объем жидкости, вытекающий за единицу времени, равен vA^*, его количество движения равно v^2A^*; «расход» кинетической энергии составляет $^1/_2\rho v^3A^*$. С другой стороны, добавляемое количество движения равно pA (избыточное давление), а энергия (потенциальная) равна $p(vA^*)$. Отсюда $pA = \rho v^2A^*$ и $pvA^* = {}^1/_2\rho v^3A^*$. Разделив первое уравнение, умноженное на v, на второе, получим в результате равенство

$$\frac{A^*}{A} = \frac{1}{2}. \tag{29}$$

Кумулятивные заряды. Другое важное применение законов сохранения мы находим в *теории направленных зарядов*, которые использовались в американских «базуках», в британских PIAT и разных других видах противотанкового и фугасного оружия времен второй мировой войны. Мы здесь кратко изложим сущность подобного применения теории струй; дальнейшую литературу можно найти в работах [17], стр. 16 и [22*].

Конструкцию и действие такого оружия можно в принципе описать следующим образом. Взрывчатое вещество с металлической прокладкой окружает полую выемку; детонатор снаряда расположен в тыльной части. Рассмотрим только случаи конической и клиновидной металлической прокладки; в продольном

[1]) Это случай «безнапорного течения»; см. Gibson A. H., Hydraulics, Constable, London, 4-е изд., стр. 122; это условие не всегда выполняется.

разрезе они показаны на рис. 20. Взрыв заставляет прокладку двигаться внутрь и вперед, причем оказывается, что приведенная таким образом в движение прокладка обладает огромной пробивной силой. Чем объясняется появление такой силы?

Наилучшее из известных объяснений исходит из следующих правдоподобных допущений (приближенного характера).

Допущение 1: получив начальный импульс от взрывчатки, стенки прокладки движутся внутрь под действием их соб-

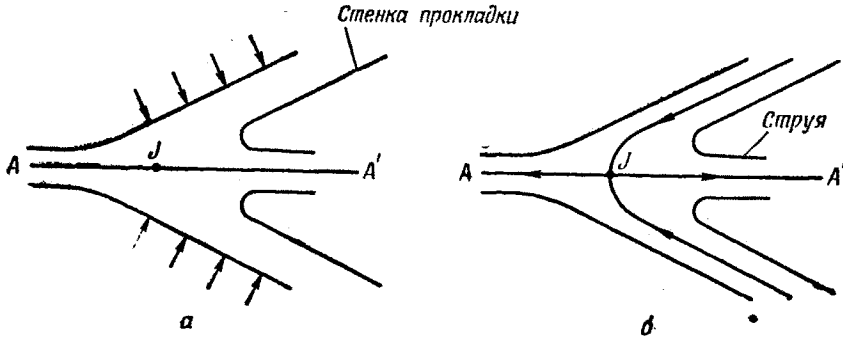


Рис. 20. Схема действия кумулятивного заряда.

ственного количества движения с постоянной скоростью до тех пор, пока они не встретятся на «оси» (AA' на рис. 20, $а$).

Допущение 2: под действием развивающихся при этом огромных напряжений металл прокладки ведет себя как идеальная жидкость.

Допущение 3: эта жидкость движется стационарно относительно осей, связанных с точкой J встречи противоположных стенок прокладки.

Допущение 4: поверхности стенок прокладки являются свободными границами.

Эти допущения сводят вопрос к задаче Гельмгольца о соударении струй (рис. 20, $б$). В плоском случае (клин) годограф представляет собой окружность; годограф же половины потока — полуокружность. Область W представляет собой бесконечную полосу с разрезом, поэтому можно полностью рассчитать течение[1]) по методу § 37.

[1]) [17], стр. 36; [8], стр. 283.

Для более важного случая конической прокладки мы не располагаем таким аппаратом. Однако с помощью законов сохранения все же можно приближенно указать зависимость скорости и массы струи от угла при вершине конуса и от используемой взрывчатки. Имея эти данные, можно оценить пробивную силу, пользуясь уравнением Бернулли [1]).

§ 50. Кавитационные течения как течения Гельмгольца

В § 43 было дано теоретическое обоснование эмпирического утверждения (Бетца — Петерсона, см. прим. 2) на стр. 88), что теория струй применима, если $\rho'/\rho \ll 1$. Это указывает на возможность математического описания кавитационных течений посредством решения краевой задачи Гельмгольца — Бриллюэна. Ниже мы дадим обзор доводов в пользу и против этого положения; в настоящем параграфе рассмотрим только первые доводы.

Во-первых, как и в случае кавитационных течений идеальной жидкости, очертания реальных каверн сравнительно гладкие, стационарные [2]) и имеют длину в 10 или более диаметров обтекаемого тела. Таким образом, они являются значительно лучшим приближением теоретической модели, чем реальные следы (см. § 53). Исключение составляют те случаи, когда препятствие помещено в кавитационную трубу при $Q > 0{,}3$.

Во-вторых, профиль каверны почти всегда выпуклый, и отрыв потока происходит у поперечного сечения с максимальным диаметром. Это утверждение в общем согласуется с решениями задачи Гельмгольца — Бриллюэна и заметно отличается от случая следов.

В-третьих, приближенная экспериментальная формула [3])

$$C_D = 0{,}55 + 0{,}4Q = 0{,}55(1 + 0{,}73Q) \qquad (30)$$

для коэффициента C_D при поперечном кавитационном обтекании цилиндра вполне хорошо согласуется с теоретическим значением $C_D(0) = 0{,}55$, вычисленным Бродецким для задачи Гельмгольца — Бриллюэна по методу из § 46, если ввести поправочный множитель $(1 + Q)$, согласно § 43 [4]).

[1]) Birkhoff G., MacDougall D. P., Pugh E., Taylor G., *J. Appl. Phys.*, 19 (1948), 563—582.

[2]) Если препятствие не совсем гладкое, могут возникнуть небольшие «биения», направленные по основному течению, как на фото I или в [23], стр. 116, 129. Когда $Q > 0{,}3$, каверна может попеременно вбирать и выпускать воду; см. [32], стр. 10.

[3]) Kempf H., Foerster E., Hydrodynamische Probleme des Schiffsantriebs, Springer, 1932, 227—342.

[4]) Сопротивление цилиндра при различных числах кавитации было рассчитано рядом авторов, литературу см. в [17*]. — *Прим. ред.*

Несколько наиболее интересных фактов относится к кавернам позади снарядов, выстреленных в воду. Фото I дает нам отличный материал такого рода [1]); на фото показана каверна, образовавшаяся позади сферы, входящей в воду со скоростью около 45 *м/сек*. На одной и той же фотопластинке были сделаны два снимка со сдвигом во времени на 0,005 *сек*. Белые точки на снимках — это маленькие пузырьки, каждый из которых сфотографирован дважды. Нетрудно найти точки, соответствующие одному и тому же пузырьку, и длина вектора, идущего от первой точки ко второй для каждой пары, в грубом приближении пропорциональна вектору скорости воды вблизи пузырька. Таким образом, можно наглядно представить себе профиль каверны и поле скоростей течения.

Однако по разным причинам подобные снимки не вполне точно соответствуют теоретической постановке вопроса. Так, например, они изображают замедляемое тело, а не стационарное течение; поверхность воды является второй свободной границей, что усложняет математическое описание; к тому же нельзя пренебрегать влиянием воздуха (ср. § 53).

Применимость теории течений Гельмгольца качественно подтверждается тем, что позади снарядов, движущихся достаточно быстро, получаются каверны сколь угодно большой длины (100 диаметров и больше). Это явление имеет важное практическое значение: большое поражающее действие скоростных снарядов и осколков бомб обусловлено тем, что они могут проделывать отверстия, значительно превышающие их собственные размеры [2]). Для нас же значение этого факта заключается в том, что он указывает физическое приближение к бесконечным кавернам, которые определяются математически как решения задачи Гельмгольца — Бриллюэна.

Обобщенная задача Гельмгольца. Если предположить, что выполняются условия (14) и что жидкость несжимаемая и невязкая, то можно применить концепцию Гельмгольца и к *ускоренному течению* с учетом *гравитационных* сил. С этой целью допустим, что кавитация самопроизвольно возникает, как только $p < p_v$. Получающуюся таким образом краевую задачу можно назвать *обобщенной* задачей Гельмгольца [3]).

---

[1]) См. Birkhoff G., Caywood T. E., *J. Appl. Phys.*, **20** (1949), 646—659 (описание приборов, использованных в опытах, и другие снимки).

[2]) См. [5], § 74 и указанную там литературу; а также Harvey E. N., *The Military Surgeon*, **98** (1946), 509—528.

[3]) Теория гравитационных волн рассматривает тесно связанную с ней задачу, когда $p = p_a$ на свободной поверхности. Обычно под поверхностью $p > p_a$, но в данном случае это условие не предполагается.

Идея о том, что реальную кавитацию можно математически описать при помощи решений обобщенной задачи Гельмгольца, подтверждается качественным наблюдением того, что *заполненные паром каверны возникают у твердых поверхностей.* Это эмпирическое положение можно вывести при рассмотрении обобщенной задачи Гельмгольца следующим образом [1]). Применяя оператор Лапласа к уравнению Бернулли [гл. I, формула (5)], получим уравнение

$$\nabla^2 p = -\rho_0 \nabla^2 \left\{ \frac{1}{2} \nabla U \nabla U + \frac{\partial U}{\partial t} + G \right\}. \tag{31}$$

В формуле (31) $\nabla^2 G = 0$, так как G есть ньютонов гравитационный потенциал; $\nabla^2 (\partial U/\partial t) = \partial (\nabla^2 U)/\partial t = 0$, в силу формулы (6) из гл. I; и, полагая $u_k = \partial U/\partial x_k$, так что $\nabla U \nabla U = \sum u_k^2$, получаем формулу

$$\nabla^2 \left(\sum u_k^2 \right) = \sum u_k \nabla^2 u_k + 2 \sum (\nabla u_k \cdot \nabla u_k) \geqslant 0.$$

Отсюда $\nabla^2 p \leqslant 0$, причем равенство имеет место только если u постоянная, т. е. p — *супергармоническая* функция. Известно, однако, что супергармоническая функция должна принимать свои минимальные значения на границе; следовательно, p будет становиться меньше p_v прежде всего на границе.

§ 51. Пузырьки

Часто употребляемое вместо «каверны» слово «пузырек» указывает добавочно на малые размеры и подвижность. При рассмотрении маленьких пузырьков обычно необходимо учитывать силу тяжести и поверхностное натяжение, как мы уже видели в § 32. Мы изложим сейчас некоторые результаты относительно пузырьков, которые показывают правильность указанных соображений, и разъясним далее причины, по которым течения Гельмгольца дают лишь приближенную картину реальных каверн.

Сначала мы напомним ([11], т. I, п. 29) о скачке давления, равном $2\gamma/r$, который создается поверхностным натяжением γ при переходе внутрь поверхности сферического пузырька радиуса r. Уже это беглое замечание указывает на возможность того, что жидкость, из которой удалены все пузырьки радиуса $r > R$, может выдерживать натяжение величиной $(2\gamma/r) - p_v$ без кавитации!

---

[1]) Kirchhoff G., Vorlesungen über Mechanik, 1876, стр. 186; см. также Bouligand G., *J. de Math.*, **6** (1927), 427.

Хотя ограниченность объема книги лишает нас возможности подробно исследовать этот увлекательный вопрос, мы все же напомним, что жидкости после дегазации в лабораторных условиях выдерживали натяжение величиной в десятки атмосфер [1]), вопреки условию (14). Подобно этому вода, из которой удален воздух, может быть перегрета без парообразования. По этим причинам лабораторные измерения кавитации теперь, как правило, сопровождаются измерением содержания воздуха в жидкости. Только потому, что чаще всего «вода» *не* в достаточной мере однородна (ср. § 1), а содержит во взвеси много «пузырьковых ядер», условие (14) приближенно справедливо.

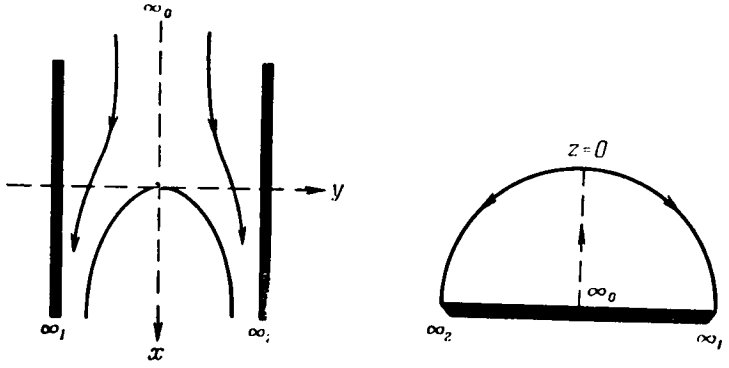


Рис. 21. Подъем плоского пузырька в канале.

Второй вопрос, имеющий математический интерес, связан с подъемом больших пузырьков в вертикальных трубах при наличии силы тяжести. Не затрагивая трудных задач физической реализации и устойчивости и пренебрегая поверхностным натяжением, мы рассмотрим идеализированный случай — подъем двумерного плоского пузырька, схематически изображенный на рис. 21, *а*.

Наиболее интересно здесь большое сходство с математическими методами, введенными в § 45, 46. Чтобы показать это, снова отобразим течение на единичный полукруг Γ в плоскости t (рис. 21, *б*), причем неподвижную границу отобразим на диаметр, а свободную — на полуокружность, как в § 37. Пусть d — диаметр трубы и u_0 — скорость подъема пузырька (если оси неподвижно связать с верхней точкой пузырька, то u_0 есть скорость падения в ∞_0 — в точке на бесконечности вверх по тече-

[1]) С другой стороны, величина 250 атмосфер, которую часто приводят, является, по-видимому, неправильной; см. [17], гл. XV, § 3.

нию). Тогда, что почти очевидно, потенциал скоростей

$$W = A \ln\left(\frac{t}{1-t^2}\right), \qquad A = \frac{u_0 d}{\pi} \tag{32}$$

характеризует источник нужной интенсивности при $t = 0$, стоки равной интенсивности при $t = \pm 1 (\infty_1$ и $\infty_2)$; границы области Γ переходят в линии тока.

Что касается сопряженной скорости $\zeta(t)$, то мы учитываем ее нули и бесконечности в области Γ подстановкой, аналогичной подстановке Леви-Чивита (19):

$$\zeta = (1+t^2)[-\ln C(1-t^2)]^{1/2} e^{\Omega(t, C)}, \qquad 0 < C < 0{,}5. \tag{33}$$

Как и раньше, из принципа симметрии Шварца следует, что функция $\Omega(t, C)$ регулярна в единичном круге $|t| < 1$ и ее ряд Тейлора

$$\Omega(t, C) = a_0(C) + a_2(C)\, t^2 + a_4(C)\, t^4 + \ldots \tag{33'}$$

суммируется по Абелю при $t = 1$.

Остается удовлетворить условию $|\zeta|^2 = 2gy$ на поверхности раздела, т. е. уравнению Бернулли для свободной границы в стационарном несжимаемом невязком течении. Это условие эквивалентно нелинейному интегральному уравнению относительно неизвестной функции

$$\lambda(\sigma) = -\operatorname{Im}\{\Omega(t, C)\} = -2a_2 \sin 2\sigma - 4a_4 \sin 4\sigma - \ldots,$$

которая определяется коэффициентами ряда (33′).

Это интегральное уравнение аналогично уравнению (25), но более сложно. Найти его приближенное численное решение оказалось трудным делом. Вычисления привели к выводу [1]), что $u_0/\sqrt{gd} = 0{,}23 \pm 0{,}01$, что вполне хорошо согласуется с немногими имеющимися экспериментальными данными [2]).

§ 52. Неустойчивость по Тейлору

Когда $\rho' > \rho$, гравитационный член в формуле (13), очевидно, вызывает *неустойчивость*. Эта неустойчивость просто-напросто такая же, как у воды в ведре, перевернутом вверх дном!

Так как поступательное движение области с ускорением a оказывает действие, эквивалентное [3]) наложению поля тяготения

[1]) Birkhoff G., Carter D., *J. Rat. Mech. Anal.*, **6** (1957), 769—780; см. также Garabedian P., *Proc. Roy. Soc.*, **A241** (1957), 423—431.

[2]) Н. Е. Жуковский в [23*] получил точное решение подобной задачи. — *Прим. ред.*

[3]) Synge J. L., Griffith B. A., Principles of Mechanics, 2-е изд., McGraw-Hill, 1949, § 53.

$g = -a$, то в ускоренном течении предыдущий результат можно интерпретировать следующим образом. Плоская поверхность раздела двух жидкостей с плотностями ρ, ρ' неустойчива, когда имеется ускорение, направленное от более легкой жидкости к более тяжелой. Такая неустойчивость называется *неустойчивостью по Тейлору* [1]).

Двумерная неустойчивость возмущений первоначально плоской поверхности раздела адекватно описывается формулой (13), пока амплитуда возмущений остается *бесконечно малой*. При начальных синусоидальных возмущениях наиболее заметным признаком нелинейной тейлоровой неустойчивости является возникновение закругленных на концах столбиков, разделенных падающими струями. Любопытно, что наличие этих столбиков приближенно согласуется с тем анализом подъема плоских пузырьков, который кратко изложен в § 51.

Тейлорова неустойчивость весьма заметно проявляется в пульсации сферических пузырьков. Такие пузырьки играют главную роль как в кавитационной эрозии (§ 42), так и в подводных взрывах. В предположении сферической симметрии (снова гипотеза (С)!) Рэлей [2]) получил простые дифференциальные уравнения для радиуса $b(t)$ как функции времени, применимые к обоим типам пузырьков. Однако, если возмущения сферической границы разложить по функциям Лежандра $p_h(\cos\varphi)$, то можно показать, что амплитуды возмущений $b_h(t)$ удовлетворяют уравнению

$$b\ddot{b}_h + 3\dot{b}\dot{b}_h - (h-1)\ddot{b}b_h = 0. \qquad (34)$$

(Это уравнение отличается от уравнения (13) для плоского случая членом $3\dot{b}\dot{b}_h$.) Пузырьки, возникающие при подводном взрыве, сначала чрезмерно расширяются, когда вода выталкивается наружу, а затем снова сужаются примерно до начального радиуса.

Вблизи минимального радиуса происходит резкое замедление течения внутрь пузырька, т. е. происходит ускорение в направлении более плотной жидкости. Это, очевидно, делает сферическую поверхность раздела неустойчивой по Тейлору, — обстоятельство, которое очень ослабляет последовательные пульсации пузырька.

Случай пузырька, заполненного паром и сжимающегося «в точку», как предполагается при идеализированной кавита-

[1]) Так как впервые ее физическое значение выяснил Тейлор; *Proc. Roy Soc.*, **A201** (1950), 192—196. Дальнейшие разъяснения и литературу см. в [17], гл. XI, § 12, 13.

[2]) [12], т. VI, стр. 504; [7], п. 91 а; [17], гл. XI, § 1—3.

ционной эрозии, менее ясен, так как тут всегда имеется ускорение, направленное от более плотной жидкости к менее плотной. Тем не менее и в этом случае имеем неустойчивость из-за отрицательного торможения[1]), так как по существу $b < 0$.

В предшествующих рассуждениях мы не только пренебрегали многими физическими переменными, которые могут иметь значение (например, поверхностным натяжением), но и ограничивались *бесконечно малыми* возмущениями. Хотя достигнут некоторый успех в исследовании возмущений конечной амплитуды, в нелинейной теории пока еще не все понятно.

§ 53. Масштабные эффекты при входе в воду

Большинство приведенных выше экспериментальных фактов подтверждают мнение о том, что математические решения обобщенной задачи Гельмгольца приближенно применимы к реальным кавитационным течениям. Упомянутые до сих пор исключения были связаны с особенностями малых пузырьков[2]). Кроме того, рассуждения в § 43 дают серьезное основание предполагать, что теория струй применима в случае, когда p'/p мало.

Если мы хотим согласовать это предположение с опытными фактами, то приходится признать, что число 0,0013 не «мало». В частности, есть два гидродинамических явления, которые наблюдаются при входе тел в воду в атмосферных условиях и отсутствуют, если воздух удален. Следовательно, никакая математическая теория, пренебрегающая отношением $p'/p \leqslant \leqslant 0{,}0013$, не может их правильно объяснить. Более важным из этих явлений считается *поверхностное смыкание*. Если в спокойную воду падает небольшой шар со скоростью 3—6 *м/сек*, то каверна сначала смыкается по схеме рис. 22, *а*, так называемое *глубинное смыкание*. Если же скорость при входе равна 12 *м/сек* или больше, то каверна начинает смыкаться на поверхности по схеме рис. 22, *б*. Снимок поля скоростей при смыкании на поверхности воспроизведен на фото II. Впервые явление поверхностного смыкания наблюдал Вортингтон примерно в 1900 г. [33]; позднее Маллок[3]) заметил, что звук, возникающий при глубинном смыкании, напоминает хлопок, а при поверхностном — всплеск.

В 1944 г. Дэвис[4]), следуя указаниям Тейлора, показал, что если в достаточной мере снизить давление воздуха p, то поверх-

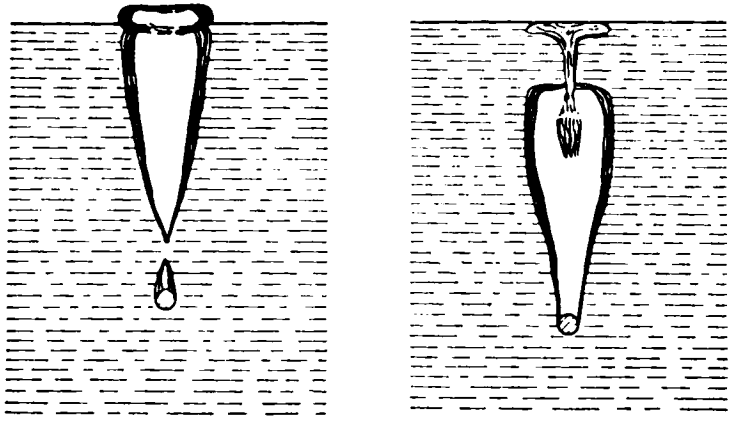
[1]) Birkhoff G., *Quar. Appl. Math.*, 13 (1956), 451—453.

[2]) См. § 32, 51 и [32]. Маленькие пузырьки кое-чего да стоят!

[3]) Mallock W., *Proc. Roy. Soc.*, A95 (1918), 138—143; см. также Harvey E. N. and McMillen J. H., *J. Appl. Phys.*, 17 (1946), 541—555.

[4]) Неопубликованный доклад, отпечатанный на мимеографе.

ностное смыкание уже не происходит даже при больших скоростях. Вначале предполагали, что наличие или отсутствие поверхностного смыкания зависит от кавитационного числа $Q = 2p/\rho v^2$, так как величина Q оказывает существенное влияние на многие кавитационные явления. Но в 1945 г. по нашему предложению Дж. Гильбарг и Андерсон [29] применили тяжелые газы типа



а *б*

Рис. 22. *а* — глубинное смыкание; *б* — поверхностное смыкание.

фреона, благодаря чему можно было независимо менять давление и плотность. Эти авторы показали, что для заданного диаметра d шара и *вертикальной* скорости входа v (число Фруда $\mathrm{Fr} = v^2/gd$) характер смыкания в основном определяется отношением ρ'/ρ. Например, для шаров диаметра 2,5 *см*, входящих в воду со скоростями 15—45 *м/сек* (т. е. при $\mathrm{Fr} = 10^3 - 10^4$) происходит поверхностное смыкание, если $\rho'/\rho > 0{,}001$, и глубинное, если $\rho'/\rho < 0{,}0001$.

Это внезапное изменение режима вблизи малого значения параметра ρ'/ρ напоминает внезапное изменение в обычном следе, происходящее вблизи $1/\mathrm{Re} = \nu/vd = 0{,}02$ (вихревая дорожка) и $1/\mathrm{Re} = 0{,}000005$, а также в трубах вблизи $1/\mathrm{Re} = 0{,}0005$ (см. гл. II). Таким образом, это дает нам еще один «парадокс аппроксимации» и снова указывает на то, что *характер решений уравнений в частных производных может внезапно изменяться вблизи очень малых значений параметров.*

В § 78 будет показано, правда, с помощью до некоторой степени произвольного физического анализа, что такое изменение режима в действительности тесно связано с безразмерным пара-

метром $N = \sqrt{\mathrm{Fr}}\rho'/\rho$ и происходит тогда, когда N примерно равно $^1/_{80}$.

Другое явление, не совместимое с наивным пониманием утверждения Бетца и Петерсона, состоит в том, что при наклонном входе в воду обнаруживается тенденция к преломлению траектории движения книзу. Хотя обстоятельства дела не вполне ясны, Слихтер показал на опыте, что гладкая дюралевая сфера диаметром в 5 *см*, входящая в воду со скоростью около 15 *м/сек* под углом в 20° к горизонту, может отклониться вниз при входе на 5° и больше. (При гораздо бо́льших скоростях были обнаружены отклонения вверх и тенденция к рикошету [1].) Полной теории этих явлений нет, но Слихтер провел тщательный (к сожалению, неопубликованный) экспериментальный анализ, который показал, что такое преломление траектории связано с *вязкостью воздуха* — переменной, влиянием которой по интуиции, казалось бы, можно пренебречь (ср. с гипотезой (А) из § 1).

§ 54. Реальные следы

Обычно уравнения Эйлера приближенно применимы в условиях стационарного течения, когда $\rho'/\rho \ll 1$, но для этого *не* достаточно, чтобы ν было мало. Это выразительно показано на фотографиях реальных следов. В частности, основной переменной, определяющей поведение реального следа, является безразмерное число Рейнольдса $\mathrm{Re} = vd/\nu$, определенное в § 21. При этом дело сводится к выяснению природы реальных следов при $\mathrm{Re} \gg 1$.

При условии $\mathrm{Re} \ll 1$ в реальных следах передняя и задняя части приближенно симметричны, и такие следы соответствуют приближению Стокса — ползущему течению (§ 30), если можно получить решение такой краевой задачи. В интервале $5 < \mathrm{Re} < 30$ (приближенно [2])) при обтекании кругового цилиндра или другого необтекаемого препятствия линии тока «отрываются», образуя конечный выпуклый след, который качественно напоминает конечную каверну, описанную ранее в этой главе. В действительности подобные следы наблюдались позади сфер и дисков вплоть до значения $\mathrm{Re} = 200$.

При бо́льших Re, главным образом в интервале $40 < \mathrm{Re} < 1000$, реальные следы обычно бывают *периодическими,*

[1]) Ramsauer C., Über den Ricochetschuss. Kiel dissertation, 1903; [5], стр. 453. [Рикошетирование по поверхности воды было изучено Л. И. Седовым (см. Седов Л. И., Водяные рикошеты, *ДАН СССР*, 37 (1942), № 9). — *Прим. ред.*]

[2]) См. [17], гл. XII—XIV относительно более подробного изложения фактов.

благодаря чему часто слышна музыкальная нота. В случае кругового цилиндра частота колебания N связана со скоростью течения v и диаметром d приближенным эмпирическим соотношением

$$N=\frac{v}{6d}. \tag{35}$$

Поскольку течения с подобными периодическими следами стационарны, это представляет собой новый парадокс симметрии (§ 26).

В интервале $10^3 < \mathrm{Re} < 10^5$ реальные следы позади плохо обтекаемых тел оказываются преимущественно *турбулентными*, но в случае достаточно гладких поверхностей пограничный слой обычно не становится турбулентным до тех пор, пока не произойдет отрыв. Однако для значений $\mathrm{Re} > 3 \times 10^5$ пограничный слой, как правило, становится турбулентным *до* отрыва. Как уже объяснялось в § 28, это дает весьма суженный (но все еще турбулентный) след.

Существенная зависимость всех этих качественных явлений от численного значения Re делает очевидным тот факт, что никакая действительно фундаментальная теория реальных следов не может пренебрегать вязкостью. Тем не менее были построены различные остроумные модели следов на основе уравнений Эйлера.

Так, Мизес [1]) предложил применять решение задачи Гельмгольца — Бриллюэна в качестве подходящего приближения реального обтекания цилиндра с ламинарным пограничным слоем. В том случае, когда из-за турбулентности пограничного слоя при больших числах Рейнольдса след сужается, хорошее приближение дает «след нулевого сопротивления».

Были предложены и другие «струйные» модели [2]), в которых вводится частичное восстановление давления в следе на больших расстояниях, что можно согласовать с эмпирическими данными.

§ 55. Вихревые модели следов

В других моделях следов заранее вводятся *априорные* распределения завихренности с целью выразить наблюдаемые свойства течения посредством простых математических уравнений. При больших Re опять-таки можно пренебречь вязкостью, что, по крайней мере при беглом рассмотрении, кажется оправданным.

---

[1]) Мизес Р., Теория полета, М., ИЛ, 1949.

[2]) Roshko A., *J. Aer. Sci.*, 22 (1955), 124—132; Cornell W. A. в [32]. [Схема, на которую указывает автор, впервые была введена Н. Е. Жуковским [15*]. — *Прим. ред.*]

В одной из старых моделей вводятся два симметрично расположенных за круговым цилиндром точечных вихря, как показано на рис. 23 (ср. рис. 13). Этой модели, которой мы обязаны Фепплю, уделялось значительное внимание ввиду ее чрезвычайной математической простоты, интересной теории ее устойчивости и связи ее с моделями вихревых дорожек (§ 56). Если вихри расположены на кривой $2ry = r^2 - a^2$ ([7], стр. 155), где a — радиус цилиндра, то вихревая конфигурация находится в (неустойчивом) равновесии. Кроме того, можно добиться, чтобы

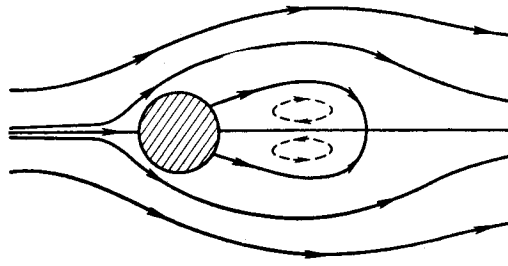


Рис. 23. Обтекание цилиндров, по Фепплю.

конфигурация линий тока модели имела хорошее согласование с наблюдаемой экспериментально, примерно в интервале $5 < \mathrm{Re} < 30$.

Однако вблизи центра вихря в стационарном плоском течении многие поля скоростей напоминают конфигурации линий тока в виде концентрических окружностей, и, следовательно, не стоит придавать слишком большое значение упомянутому согласованию. Теоретически же в стационарном течении завихренность должна из любого центра распространяться во внешние области, становясь асимптотически *постоянной* внутри любой замкнутой линии тока ламинарного течения при большом числе Рейнольдса.

Эта значительно более подходящая модель была недавно предложена Бэтчелором [1]), однако до сих пор при конкретных расчетах не удалось преодолеть вычислительные трудности. Кроме того, в виду неустойчивости по Гельмгольцу, реальные следы при больших Re дают в высшей степени нестационарное

[1]) *J. Fluid Mech.*, **1** (1956), 177—190 и 388—398; см. также Wood W. W., там же, **2** (1957), 77—87.

течение, и, следовательно, модель является нереальной. Для диапазона $5 < \mathrm{Re} < 30$, по-видимому, более приемлемой является модель вязкого течения Озеена (§ 31) [1]).

§ 56. Вихревые дорожки

Наиболее заманчивой вихревой моделью для следов является «вихревая дорожка», состоящая из двух параллельных рядов точечных вихрей, размещенных на одинаковом расстоянии, причем эти периодические ряды расположены «в шахматном порядке», так что вихри каждого ряда приходятся посредине между вихрями другого ряда. Эта модель была предложена Карманом [2]) для представления периодических следов за цилиндрами, наблюдаемых в основном в интервале $30 < \mathrm{Re} < 300$. Для нее комплексный потенциал $W = U + iV$ записывается в следующем виде:

$$W = \frac{i\varkappa}{2\pi}\left\{\lg \sin \frac{\pi z}{a} - \lg \sin \frac{\pi}{a}\left(z - \frac{a}{2} - ih\right)\right\}. \qquad (36)$$

Таким образом, потенциал включает три параметра: интенсивность вихря $\varkappa$, продольный размер a и поперечный размер h. В любом конкретном случае определение этих параметров, очевидно, является основной задачей, а любой набор значений $\varkappa$, a и h задает равновесное расположение.

Карман показал, что в невязкой жидкости такое расположение имеет неустойчивость первого порядка (т. е. отклонения от положения равновесия растут экспоненциально), если только h/a не равно 0,281 (приближенно). Он показал также, что аналогичное размещение вихрей, при котором вихри в обоих рядах остаются параллельными [величина $a/2$ опускается в формуле (36)], всегда неустойчиво.

Кроме того, исследуя скорость K, с которой завихренность распространяется в пограничном слое по обе стороны, Гейзенберг и Прандтль [3]) получили соотношение

$$\frac{\varkappa v}{a} \simeq K \simeq \frac{(1+Q)\,v^2}{4}, \qquad (37)$$

откуда $\varkappa \simeq (1 + Q)av^2/4$. Хотя сам вывод весьма приблизителен, результат является надежным с точностью до множителя 2.

---

[1]) Литература приведена в [17], стр. 263, примечание 13. Отличный исторический обзор вихревых систем в следах дал Розенхед Л., сб. Проблемы механики, ИЛ, М., 1955, стр. 446—454.

[2]) *Gott. Nachr., Math.-Phys. Kl.* (1912), 547—556.

[3]) Heisenberg W., *Phys. Zeits.*, 23, (1922), 363—366 и комментарии Прандтля на стр. 366; см. также [3], стр. 555, 564 и [11], т. 2, стр. 132.

Наконец, легко догадаться, что величина h не должна намного отличаться от диаметра цилиндра d; в § 57 мы сможем в большей мере обосновать это теоретически. Учитывая все приведенные выше соображения, можно построить приближенную *априорную* модель периодических следов.

Очевидно, что эта модель вихревой дорожки возникла не из решения математической краевой задачи: остроумная идея Кармана не принадлежит к «рациональной гидродинамике» в смысле § 1. Так, в этой теории обтекаемое препятствие не является неким реально существующим геометрическим объектом.

Было высказано предположение, что вихревые дорожки естественно возникают при закручивании вихревых слоев, представляя, таким образом, асимптотические решения задачи Коши. Однако приближение в виде модели сосредоточенных *точечных* вихрей является нереальным как теоретически, так и экспериментально [1]), даже несмотря на то что, как иногда говорят, вихревые слои закручиваются, причем «завихренность все больше и больше сосредоточивается в закрученных участках».

Эти замечания имеют своей целью подчеркнуть, насколько далеко ушла современная гидродинамика от простой и догматической идеи Лагранжа. Все стационарные вихревые течения из § 55 и все решения задачи Гельмгольца удовлетворяют уравнениям Эйлера для несжимаемой невязкой жидкости; это показывает, насколько далека от «корректной» постановки задача стационарного течения для этих уравнений.

В действительности же само понятие «стационарного течения» ошибочно с физической точки зрения для жидкостей малой вязкости!

§ 57. Количество движения в следе

Однако тот факт, что идеи Лагранжа оказались ошибочными, не означает, что теоретический подход в гидродинамике следует отвергнуть. Как мы видели в гл. II, есть большие основания считать уравнения Навье-Стокса для несжимаемой жидкости заслуживающими доверия. Наше рассмотрение теории следов мы закончим кратким обзором результатов, полученных к настоящему времени при помощи этих уравнений. Как и в случае кавитационного движения (§ 49), многое может быть объяснено при помощи законов сохранения.

Возможно, что наиболее полезной является интерпретация *количества движения следа*. В эксперименте позади всякого

[1]) Теоретический разбор см. в работе Birkhoff G., Fisher J., *Rend. Soc. Mat. Palermo*, 8 (1959), 77—90, относительно экспериментальных данных см. [3], гл. XIII. Цитата взята из той же работы.

движущегося в жидкости твердого тела мы наблюдаем движущийся вперед «след». Таким образом, для двумерного случая можно определить количество движения следа, приходящееся на единицу длины, на расстоянии x от препятствия, по формуле ([17], стр. 266).

$$M(x)=\rho\int u(x, y)\,dy, \tag{38}$$

где ось x выбрана параллельно направлению движения твердого тела, а величина u обозначает поступательную скорость[1]) движения жидкости.

Если мы принимаем эмпирический факт, что вне следа завихренностью можно пренебречь и поэтому здесь применимы приближения классической гидродинамики, то это приводит нас к предположению, что количество движения $M(x)$ фактически не зависит от величины x — небольшого расстояния позади препятствия[2]). Эта гипотеза подтверждается экспериментально.

Далее, естественно предположить, что количество движения в следе создается давлением тела на жидкость (второй закон Ньютона) и что оно равно по величине и противоположно по направлению сопротивлению D, которое жидкость оказывает движению тела (третий закон Ньютона). В частности, сопротивление D должно равняться возникающему за единицу *времени* количеству движения в следе, которое в свою очередь должно равняться произведению $u_\infty M$, где M — количество движения в следе в расчете на единицу *длины*.

Эти интуитивные догадки можно сформулировать математически и вывести из разумных предположений относительно течения жидкости[3]). Еще более интересно то обстоятельство, что некоторое уточнение таких формул дает наилучший способ *измерения* фактического лобового сопротивления крыла в полете,— по давлениям в трубках Пито, определяемым позади крыла на расстоянии от него, составляющем небольшую долю ширины крыла[4]).

Для нас еще более интересно применение закона сохранения количества движения следа к модели «вихревой дорожки» из

---

[1]) Для периодических или турбулентных следов — среднее значение этой скорости по времени.

[2]) Чтобы придать таким гипотезам математическую респектабельность, можно называть их «тауберовыми».

[3]) [17], гл. XII, § 9. Более раннее тщательное исследование провел Taylor G. Y., *Phil. Trans.*, **A225** (1925), 238—245; см. также Goldstein S., *Proc. Roy. Soc.*, **A142** (1933), 563—573.

[4]) [3], § 115. Первоначально эту технику разработал Betz A., *Zeits. Flugt Motorluftschiffahrt*, **16** (1925), 42—44; см. также Fage A. Jones B. M., *Proc. Roy. Soc.*, **A111** (1926), 592—603.

§ 56. В очень длинном вихревом «хвосте» с ограниченной скоростью *среднее* продольное расстояние $\bar{a}$ между вихрями не может изменяться со временем. С другой стороны, количество движения следа в расчете на единицу длины легко подсчитать по формуле $\bar{h}\varkappa/\bar{a}$, где $\bar{h}$ — среднее поперечное расстояние между вихрями. Теоретически из этого следует, что в невязкой жидкости, когда $\varkappa$ постоянно во времени, значение $\bar{h}$ (а следовательно, и отношение среднего продольного расстояния к среднему поперечному) должно быть *постоянно* во времени: здесь нет тенденции к единственному «устойчивому» [1]) отношению протяженностей. В вязкой жидкости сосредоточения завихренности $\pm\varkappa$ противоположных знаков диффундируют и взаимно уничтожаются; следовательно, можно ожидать возрастания величины $\bar{h}$, что и наблюдается в эксперименте.

С научной точки зрения приведенные выше результаты интересны тем, что они помогают выяснить асимптотическую структуру реальных следов. Однако для получения конкретных выводов нужно ввести еще одну гипотезу подобия. Подобие и относящиеся к этому идеи будут основной темой последующих гл. IV и V. Относительно же применений к теории следов см. работу [17], гл. XII и XIV.

[1]) Фактически даже отношение протяженностей Кармана $h/a = 0{,}281\ldots$ дает неустойчивость, хотя и низшего порядка, см. [18]. [Это было установлено Н. Е Кочиным в работе [24*]. — *Прим. ред.*]

Глава IV

МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ РАЗМЕРНОСТЕЙ

§ 58. О моделях

Применение *моделей* при изучении механики жидкостей находит отклик у каждого, кто не лишен естественной любознательности. Какой мальчик не играл с моделями кораблей и самолетов и с упрощенными моделями плотин и водосливов? Но даже в наиболее развитых областях современной техники такие модели незаменимы и имеют существенное значение.

И несмотря на это, имеется очень мало таких физических дисциплин, где разрыв между теорией и инженерной практикой был бы больше, чем в области применения моделей к изучению гидродинамических явлений. Ученые-теоретики стремятся оставить в тени те неудобные факты, которые не укладываются послушно в рамки простой логической теории. В то же время инженеры, постоянно соприкасающиеся с действительностью под открытым небом и в лаборатории, обычно слишком перегружены частными техническими задачами, и им практически недоступно участие в академических дискуссиях. Ведь легче воздать на словах должное общепризнанным теориям, а при решении конструкторских проблем полагаться на опыт и интуицию.

Наша цель — уменьшить этот разрыв путем критического исследования проблемы в целом с обеих точек зрения. Мы начнем с *теории* моделирования, подчеркивая при этом связь с понятием *группы*.

Сначала, в § 59—65 будет дан критический обзор *анализа размерностей*. К анализу размерностей обычно обращаются, когда нужно обработать результаты экспериментов с моделями, и он обладает тем преимуществом, что для него не требуется математических сведений сверх курса элементарной алгебры, но зато и тем недостатком, что необходимо вводить добавочные постулаты, физическую надежность которых приходится проверять особо. В § 60—61 эти постулаты даны в *теоретико-групповой* формулировке в терминах «группы подобия» всевозможных изменений основных единиц.

Затем в § 66—74 будет показано, как эти постулаты можно вывести из математических формулировок динамики жидкостей, рассмотренных в гл. I, II, проверяя гидродинамические уравнения на инвариантность относительно заданных групп. Мы будем называть указанный метод *инспекционным анализом*, заимствуя этот выразительный термин у Руарка [56]; фактически, метод основан на старой идее, которая была предложена Афанасьевой-Эренфест [61]. Но до сих пор данный метод никогда практически не использовался, хотя, как мы покажем, он является значительно более надежным (§ 72) и более общим (§ 74), чем анализ размерностей.

Наконец, в § 75—78 выводы инспекционного анализа (и анализа разномерностей) будут сопоставлены с *практикой* моделирования. Как и в гл. I и II, окажется, что действительность намного сложнее теории. В инженерной практике должны учитываться многие факторы, игнорируемые при математическом описании, и приходится использовать некоторые приемы, не получившие еще научного обоснования.

§ 59. Анализ размерностей

Анализ размерностей возник в результате распространения на физические явления понятий геометрического подобия, отношения и пропорции, знакомых еще грекам [1]). Впервые это было сделано Галилеем при определении прочности балок из данного материала в зависимости от их линейных размеров. Он ввел интуитивно очевидное предположение о том, что разрушение балки происходит тогда, когда сила, отнесенная к единице площади (напряжение), превосходит некоторую максимальную величину, характерную для материала балки. Галилей пришел к выводу, что величина безопасной нагрузки на единицу объема обратно пропорциональна длине и предвосхитил многие другие классические результаты.

Затем анализ размерностей применяли Мариотт и Ньютон [2]), но только Фурье (см. прим. 1) на этой стр.) впервые установил, что существуют определенные «основные единицы»,

---

[1]) Так, Фурье ([59], гл. II, разд. IX) упоминает, что греки знали размерности площади и объема. Рэлей всегда ссылался на «подобие» и «динамическое сходство». У Галилея, см. его «Две новые науки» (1638), День второй. [«Беседы о двух отраслях науки», М.—Л., 1933. — *Прим. ред.*]

[2]) Mariotte, Traité de la percussion des corps (1679) и Traité du mouvement des eaux (1686); Newton, Principia Mathematica (1686), т. 2, разд. 7. [В русском переводе: Крылов А. Н., Собрание трудов, т. 7, М.—Л., 1936. — *Прим. перев.*] См. также Bertrand J., *J. de l'Ecole Polyt.*, 19 (1848), 189—197.

относительно которых каждая физическая величина имеет определенные «размерности», которые надо записывать как показатели степеней. Конечно, эта идея почти очевидна, если вдуматься в смысл «коэффициентов пересчета» при переходе физических величин от одной системы единиц к другой.

Посредством различного выбора единиц Фурье без труда показал, что одни и те же аналитические формулы дают как решения задачи об охлаждении сфер малых размеров так и задачи об остывании Земли. Поскольку нас интересует соотношение теории и фактических данных, то здесь уместно заметить, что выводы Фурье были не правомочны, так как он не учитывал конвекции и радиоактивного нагрева земного ядра. Тем не менее его метод исключения параметров путем изменения единиц стал теперь классическим и применяется со значительным (хотя и не одинаковым!) успехом во многих разделах физики. Стокс, Савар, Фруд, Рейнольдс, Ваши и многие другие исследователи с успехом использовали этот метод и установили ряд законов фундаментального значения.

Рэлей первым занялся изучением вопроса о том, насколько указанный прием плодотворен как общий метод исследования. Это вызвало длившуюся в течение двух десятилетий, 1900—1920 гг., оживленную дискуссию с участием ведущих физиков о молчаливо принятых ранее предположениях и о границах применимости анализа размерностей.

Эти предположения и ограничения, хотя на них часто не обращают внимания в технике и в популярной литературе, изложены наряду с другими вопросами этого раздела в классической монографии Бриджмена [46], к которой мы отсылаем любознательного читателя. Другими авторитетными источниками являются работы Л. И. Седова [57] и Лангхаара [51].

§ 60. Группа подобия

Одна из наших основных целей — обосновать анализ размерностей с помощью постулатов, в которых явно используется упомянутая в § 58 группа подобия положительных скалярных преобразований единиц измерения. Хотя постулаты будут формулироваться абстрактно, мы будем интерпретировать их при помощи простых примеров из гидромеханики, и, быть может, самым простым из них является следующий пример.

Пример 1. Допустим (или вспомним!), что скорость волны v в глубоком водоеме определяется ее длиной λ и ускорением силы тяжести g, так что $v = f(\lambda, g)$. Допустим также, что это

соотношение остается тем же самым при любом выборе «основных единиц» длины и времени. Сделав эти предположения, мы можем математически рассуждать следующим образом.

Пусть в некоторой фиксированной системе основных единиц волна длиной λ движется со скоростью v в гравитационном поле интенсивности g. Если выбрать новую единицу длины, равную α старых единиц, и новую единицу времени, равную τ старых единиц, то длина волны запишется в виде $\lambda' = \lambda/\alpha$, а ее скорость — в виде $v' = v\tau/\alpha$, в то время как ускорение силы тяжести примет вид $g' = g\tau^2/\alpha$. Выбрав $\alpha = \lambda$ и $\tau = \sqrt{\lambda/g}$, мы получим $\lambda' = g' = 1$, и формулу

$$\frac{v}{\sqrt{g\lambda}} = v' = f(\lambda', g') = f(1, 1) = C,$$

где C — скорость волны единичной длины в гравитационном поле, выраженная в новой системе основных единиц. Отсюда в новой системе основных единиц $v = C\sqrt{g\lambda}$. Но, по предположению, функция f не зависит от выбора основных единиц; отсюда $v = C\sqrt{g\lambda}$ также и в старой системе единиц, где C — некоторая универсальная постоянная. (Для волн в глубоком водоеме $C = 1/\sqrt{2\pi}$.)

Предыдущее рассуждение можно провести в абстрактной форме в терминах обычных понятий «основных» и «производных» однородных по размерности величин. Эти понятия характеризуются следующими двумя постулатами, которые представляют собой нечто большее, чем просто определения. (В примере 1 λ — основная величина, в то время как v и g — производные величины.)

Предположение I. Имеются некоторые независимые «основные величины» q_i $[i = 1, \ldots, n]$, такие, что они независимо преобразуются «заменой единиц» по формулам

$$T_\alpha(q_i) = \alpha_i q_i \quad [i = 1, \ldots, n;\ \alpha_i > 0], \tag{1}$$

где α_i — любые положительные действительные числа. (В механике $n = 3$, а q_i — это длина, время и масса; в примере 1 $n = 2$, так как масса не входит в рассмотрение.)

Предположение II. Имеются «производные величины» Q_j (такие, как плотность, скорость, вязкость и т. д.), которые *однородны по размерности* в том смысле, что при преобразовании по формуле (1) каждое Q_j умножается на подходящий «коэффициент пересчета»:

$$T_\alpha(Q_j) = \alpha_1^{b_{j1}} \ldots \alpha_n^{b_{jn}} Q_j. \tag{2}$$

Показатели b_{jk} называются «размерностями» величины Q_j в данной системе основных единиц; если все они равны нулю, то величина Q_j называется «безразмерной». Очевидно, что любое произведение степеней однородных по размерности величин остается однородным по размерности. Ясно также, что формула (1) является частным случаем формулы (2) при условии

$$b_{ik} = \delta_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{если } k = i, \\ 0, & \text{если } k \neq i. \end{cases}$$

Следовательно, с математической точки зрения предположение I излишне.

Преобразованиям T_α взаимно однозначно соответствуют векторы $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ с положительными компонентами («положительные» n-векторы). Кроме того, если определить следующие действия:

$$\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta} = (\alpha_1\beta_1, \ldots, \alpha_n\beta_n), \quad \boldsymbol{\alpha}^{-1} = (\alpha_1^{-1}, \ldots, \alpha_n^{-1}), \tag{3}$$

то, очевидно, выполняются равенства

$$T_\alpha(T_\beta(Q_j)) = T_\beta(T_\alpha(Q_j)) = T_{\alpha\beta}(Q_j), \tag{3а}$$

$$T_{\alpha^{-1}}(T_\alpha(Q_j)) = Q_j. \tag{3б}$$

Говоря математическим языком, равенства (2) определяют представление *мультипликативной группы*[1]) положительных n-векторов, определенной соотношением (3) как группа (2) линейных преобразований пространства векторов $\mathbf{Q}$.

§ 61. Соотношения, не зависящие от единиц измерения

При выводе формулы $v = C\sqrt{g\lambda}$ в примере 1 мы использовали еще два других предположения. На абстрактном языке выше приведенных предположений I и II их можно сформулировать следующим образом.

Предположение III. Существует функциональное соотношение вида

$$\varphi(Q_0, \ldots, Q_r) = 0, \tag{4}$$

где φ — однозначная функция. [(В примере 1 $r = 2$, а $\varphi = v - f(\lambda, g)$.)]

Предположение IV. Соотношение (4) не зависит от выбора основных единиц.

[1]) Под *группой* понимается такое множество, замкнутое относительно ассоциативного умножения, что для каждого из его элементов существует обратный элемент относительно умножения. Подробности см. в [45], гл. VI.

Таким образом, в анализе размерностей рассматриваются функциональные соотношения $\varphi(Q_0, Q_1, \ldots, Q_r) = 0$ *положительных* переменных, которые под действием (коммутативной, зависящей от n-параметров) группы T_α преобразуются по формулам (2). Говоря точнее, исследуются соотношения, которые не зависят от выбора единиц измерения и которые определяются следующим образом.

Определение. Функциональное соотношение $\varphi(Q_0, Q_1 \ldots, Q_r) = 0$ однородных по размерности переменных *не зависит от выбора единиц* тогда и только тогда, когда из соотношения $\varphi(Q_0, Q_1, \ldots, Q_r) = 0$ следует

$$\varphi(T_\alpha(Q_0), \ldots, T_\alpha(Q_r)) = 0 \tag{5}$$

при любом преобразовании основных единиц T_α.

Обратно, используя формулу (3б), получаем, что из соотношения $\varphi(T_\alpha(Q_0), \ldots, T_\alpha(Q_r)) = 0$ следует

$$\varphi(Q_0, \ldots, Q_r) = 0 \tag{5'}$$

для каждого преобразования T_α, но мы, не вникая в эти тонкости, будем принимать как формулу (5), так и формулу (5'). Другими словами, по определению, следующее соотношение $\varphi(Q_0, Q_1, \ldots, Q_r) = 0$ не зависит от единиц тогда и только тогда, когда в гипероктанте, определяемом положительными [1]) векторами $\mathbf{Q} = (Q_0, Q_1, \ldots, Q_r)$, *геометрическое место точек*, соответствующее этому уравнению, *инвариантно относительно преобразований группы* (2).

Следует подчеркнуть, что уравнению $\varphi = 0$ соответствует некоторое геометрическое место точек и на вид функции φ не наложено никаких ограничений. Это иллюстрируется следующим простым примером.

Пример 2. Рассмотрим частицы, выведенные из состояния покоя и движущиеся с не зависящим от времени ускорением a. Обозначим расстояние через s, время через t и скорость через v.

Для такой системы всегда справедливы хорошо известные однородные по размерности (следовательно, не зависящие от единиц измерения) соотношения $v = at$ и $v^2 = 2as$. Однако геометрическое место точек, определяемое уравнением $v = at$ в положительном октанте пространства (v, a, t) совпадает с геометрическим местом, определяемым, например, соотношением

$$\sqrt[3]{(v-at)(a+v)} + \sqrt[5]{t(v-at)} = 0. \tag{6}$$

[1]) Это все можно распространить на случай неположительных векторов, но только ценой усложнения формулировок.

Поэтому соотношение (6) *не зависит от выбора единиц*, хотя оно и не является однородным по размерности.

Несмотря на свою искусственность, этот пример поможет нам выявить различие между формальным доказательством Букингема (§ 64) П-теоремы и более общим геометрическим доказательством Вашй, которое будет изложено в § 63. Но прежде чем доказывать П-теорему в общем случае, мы рассмотрим сначала частный случай $r = n$, когда соотношения, не зависящие от выбора единиц,

$$Q_0 = f(Q_1, \ldots, Q_n), \tag{7}$$

содержат точно на единицу больше величин $Q_j (j = 0, \ldots, n)$, чем имеется основных единиц $(i = 1, \ldots, n)$. Мы будем предполагать, что f — однозначная функция, а также, что величины $Q_1, \ldots, Q_n$ зависят от n основных единиц, т. е. матрица $\|b_{jk}\|$ из формулы (2), состоящая из $(n \times 1) \times n$ элементов, имеет ранг n. Эквивалентным условием является требование, чтобы квадратный минор B, соответствующий $j = 1, \ldots, n$, был *неособой* матрицей [1]).

Как уже было указано выше, пример 1 относится к этому случаю при $n = r = 2$.

Теорема 1. *Всякое соотношение вида* (7), *не зависящее от выбора единиц и содержащее n основных единиц, равносильно соотношению*

$$Q_0 = CQ_1^{x_1} \ldots Q_n^{x_n}, \tag{8}$$

где $C = f(1, \ldots, 1)$ *и* x_i *определяются из уравнений*

$$b_{0i} = b_{1i}x_1 + \ldots + b_{ni}x_n \qquad [i = 1, \ldots, n]. \tag{8'}$$

Доказательство. Так как величины Q_i положительные и минор B — неособая матрица, то мы можем найти такой вектор α, что $T_\alpha(\mathbf{1}) = \mathbf{Q}_0$, где $\mathbf{1} = (1, \ldots, 1)$; и пусть при этом $C = f(1, \ldots, 1)$. Отсюда, применив формулы (5), (5′) к соотношению $C - f(1, \ldots, 1) = 0$, получим равенство

$$T_\alpha(C) - f(Q_1, \ldots, Q_n) = 0.$$

Применяя формулу (2) к первому члену и перенося его в другую сторону, можно записать

$$f(Q_1, \ldots, Q_n) = C\alpha_1^{b_{01}} \ldots \alpha_n^{b_{0n}}. \tag{9}$$

[1]) Этому эквивалентно условие неравенства нулю определителя B (см. [45], стр. 304).

С другой стороны, так как минор B — неособая матрица, то система (8′) имеет единственное решение $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$. Для этого решения $\mathbf{x}$ справедливы равенства

$$Q_j^{x_j} = T_\alpha (1)^{x_j} = \left(\alpha_1^{b_{j1}} \ldots \alpha_n^{b_{jn}}\right)^{x_j}.$$

Выполнив элементарные выкладки с показателями, получим

$$\prod_j Q_j^{x_j} = \prod_{j,k} \alpha_k^{b_{jk}x_j} = \prod_k \alpha_k^{\sum b_{jk}x_j} = \prod_k \alpha_k^{b_{0k}}.$$

Делая подстановку в правую часть равенства (9), получим формулу (8).

Для дальнейшего разъяснения смысла теоремы 1 приведем следующие известные примеры.

Пример 3. Предположим, что сопротивление D, которое жидкость оказывает движению твердого тела заданной формы, является *инерциальным* в том смысле, что оно определяется плотностью жидкости ρ, скоростью v и диаметром тела d. Тогда при $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$ формула (8) эквивалентна соотношению

$$MLT^{-2} = (ML^{-3})^x (LT^{-1})^y L^z,$$

так что уравнения (8′) сводятся к виду

$$1 = x, \quad 1 = -3x + y + z, \quad -2 = -y,$$

откуда $x = 1$, $y = z = 2$. Отсюда, если соотношение не зависит от единиц измерения, то $D = K_D \rho v^2 d^2$, где K_D — постоянная. (В действительности же величина $K_D = \pi C_D/8$, которая носит название баллистического коэффициента сопротивления, слабо изменяется.)

Пример 4. Если сопротивление D определяется через ρ, v, d и вязкость жидкости μ в виде функционального соотношения, не зависящего от выбора единиц, и если силами инерции можно пренебречь («ползущие течения» Стокса), то аналогичный подсчет размерностей приводит к соотношению $D = K^* \mu v d$, где K^* — еще одна постоянная.

§ 62. Числа Рейнольдса и Маха

В теореме 1 число n основных единиц равнялось числу r переменных, входящих в не зависящее от выбора единиц соотношение

$$Q_0 = f(Q_1, \ldots, Q_r).$$

При $r = n + 1$ рассуждения, аналогичные доказательству теоремы 1, приводят к формулам, содержащим полезные безразмерные параметры.

Теорема 1′. *Всякое соотношение* $Q_0 = f(Q_1, \ldots, Q_r)$, *не зависящее от выбора единиц и содержащее* $(r-1)$ *основных единиц, можно записать в виде*

$$Q_0 = C(\Pi) Q_1^{x_1} \ldots Q_r^{x_r},$$

где $\Pi = Q_1^{a_1} \ldots Q_r^{a_r}$ — *безразмерное произведение степеней* $Q_1, \ldots, Q_r$ *и* $Q_0 Q_1^{-x_1} \ldots Q_r^{-x_r} = \Pi_0$ *также безразмерное произведение.*

Теперь мы проиллюстрируем предыдущий результат, представляющий собой частный случай П-теоремы (мы ее докажем ниже), двумя важными примерами из гидромеханики.

Пример 5. Предположим, что $D = f(\rho, v, d, \mu)$ есть функция от ρ, v, d и μ, не зависящая от выбора единиц при всех преобразованиях единиц длины, времени и массы по формуле (1). Безразмерные величины $K_D = D/\rho v^2 d^2$ и $\mathrm{Re} = \rho v d/\mu$ (число Рейнольдса) инвариантны относительно этих преобразований. Но с помощью одного из таких преобразований [1]) мы можем одновременно свести ρ, v, d к 1; при этом μ переходит в $\mu/\rho v d = 1/\mathrm{Re}$. Поэтому

$$D = K_D(\mathrm{Re})\rho v^2 d^2, \quad \text{где} \quad K_D(\mathrm{Re}) = f\left(1, 1, 1, \frac{1}{\mathrm{Re}}\right). \tag{10}$$

Пример 6. Предположим, что D подобным же образом определяется величинами ρ, v, d и сжимаемостью невозмущенного потока жидкости — $d(1/\rho)/dp = d\rho/\rho^2 dp$. При этом получаются безразмерные величины $D/\rho v^2 d^2 = K_D$ и $v^2 d\rho/dp$ (размерность последней $(LT^{-1})^2 (ML^{-3}) (MLT^{-2}L^{-2})^{-1} = 1$). Физический смысл выражения $v^2 d\rho/dp$ станет понятнее, если мы вспомним, что $dp/d\rho = c^2$, где c — скорость звука в жидкости. Рассуждая, как в примере 5, получаем соотношение

$$K_D = f(\mathrm{M}^2), \quad \text{где} \quad \mathrm{M} = \frac{v}{c} \text{ — число Маха [2]}. \tag{11}$$

Формулу (10) можно вывести также из теоремы 2 гл. II, если предположить, что уравнения Навье — Стокса полностью

[1]) Это доказательство в основном принадлежит Ваший; см. также Riabouchinsky D., *L'Aerophile*, September 1911.

[2]) Называемое во Франции «числом Сарро». Термин «число Маха» предложил Ackeret J., *Schweiz. Bauzeitung*, 94 (1929), 179.

определяют движение жидкости, ср. § 71. Аналогично формулу (11) можно вывести из уравнений Эйлера — Лагранжа, ср. § 73.

Прежде чем доказать П-теорему, мы приведем еще один важный пример применения анализа размерностей.

Пример 7. Пусть имеется отнесенное к единице массы *стационарное* распределение энергии турбулентности между вихрями различных размеров λ, так что $dE = E'(\lambda)d\lambda$. Предположим, что это распределение определяется *инерциальным* механизмом передачи энергии турбулентности вихрям меньших размеров λ. Очевидно, что скорость передачи энергии, приходящейся на единицу массы, имеет размерность $V^2/T = L^2/T^3$; следовательно, при любом изменении масштаба вида $L \to \alpha L$, $T \to \gamma T$ она умножается на величину α^2/γ^3. Кроме того, чтобы $E'(\lambda)$ сохранялось неизменным, эта скорость не должна зависеть от λ. Отсюда осредненное *время* $T(\lambda)$, необходимое для превращения вихрей размера λ в вихри меньших размеров, должно быть пропорционально $\lambda^{2/3}$: *при изменении масштаба величина* T *имеет размерность* $L^{2/3}$. Теперь рассмотрим спектр *частот* энергии: $dE = F(k)dk$, где $k = 2\pi/\lambda$ есть волновое число. Поскольку dE имеет размерность $V^2 = L^2T^2$, а величины k и $dk = 2\pi d\lambda/\lambda^2$ имеют размерность $1/L$, то функция $F(k)$ имеет размерность L^3/T^2, или $L^{5/3}$, или $k^{-5/3}$. Окончательно из анализа размерностей следует формула Колмогорова для *распределения энергии турбулентности*: $F(k) \sim k^{-5/3}$.

Формула Колмогорова связана с известным парадоксом бесконечной плотности полной энергии турбулентности, приходящейся на единицу объема, в случае мощных пульсаций, но мы не будем рассматривать здесь объяснение этого парадокса.

§ 63. П-теорема

Не приводя больше примеров[1]), перейдем сразу к доказательству общей П-теоремы Ваши и Букингема, которую можно сформулировать следующим образом:

Теорема 2. *Пусть положительные переменные* $Q_1, \ldots, Q_r$, *при всех преобразованиях по формуле* (1) *основных единиц* $q_1, \ldots, q_n$ *изменяются согласно формуле* (2). *Пусть* $m \leqslant n$ —

[1]) Многочисленные примеры приводят Бриджмен П. [46], гл. I, VI; Седов Л. И. [57]; Лангхаар [65], Портер [54] и Робертсон Б. А., *Gen. Elec. Review*, **33** (1930), 207; см. также Рэлей, Phil. Mag., **34** (1892), 59 и 8 (1905), **66**, а также Nature, **95** (1915), 66.

ранг матрицы $\|b_{ik}\|$, *определяемой формулами* (2). *Тогда всякое не зависящее от выбора единиц соотношение вида*

$$f(Q_1, \ldots, Q_r) = 0 \tag{12}$$

эквивалентно условию вида

$$\varphi(\Pi_1, \ldots, \Pi_{r-m}) = 0 \tag{13}$$

при подходящим образом выбранных безразмерных произведениях $\Pi_1, \ldots, \Pi_{r-m}$ *степеней* Q_i.

Пояснение. Первая фраза соответствует предположениям I и II из § 60. Предположения III и IV обобщены формулой (12).

Доказательство. Согласно определению, матрица $\|b_{ik}\|$ имеет неособый минор [1]) m-го порядка. Переставляя Q_j и q_i мы можем добиться того, чтобы в этот минор входили лишь $Q_1, \ldots, Q_m$ и $q_1, \ldots, q_m$. (Физически это означает, что другие основные единицы не являются независимыми.) Тогда всякий вектор $\mathbf{b}_j = (b_{j1}, \ldots, b_{jn})$ при $j > m$ есть линейная комбинация $\mathbf{b}_j = c_{j1}\mathbf{b}_1 + \ldots + c_{jm}\mathbf{b}_m$ векторов $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_m$.

Теперь определим $(r - m)$ новых *безразмерных* переменных Π_i формулами

$$\Pi_i = Q_{m+i} Q_1^{-c_{j1}} \ldots Q_m^{-c_{jm}}.$$

Определим также новую функцию g в виде

$$g(Q_1, \ldots, Q_m, \Pi_1, \ldots, \Pi_{r-m}) = f(Q_1, \ldots, Q_r); \tag{14}$$

очевидно, что в формуле (14) $Q_j = \Pi_{j-m} Q_1^{c_{j1}} \ldots Q_m^{c_{jm}}$ при $j > m$.

В «октанте» $Q_1 > 0, \ldots, Q_r > 0$ преобразование (2) независимых переменных взаимно однозначно в *большом* [2]). Поэтому соотношение $f = 0$ эквивалентно (т. е. определяет то же самое геометрическое место) соотношению $g = 0$, и, следовательно, $g = 0$ также не зависит от выбора единиц. Но так как минор матрицы $\|b_{ij}\|$ при $i, j = 1, \ldots, m$ неособый, то систему линейных уравнений $b_{i1} \lg \alpha_1 + \ldots + b_{im} \lg \alpha_m = \lg Q_i$ для любых положительных $Q_1, \ldots, Q_m$ при подходящем выборе можно разрешить относительно чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$. А так как соотношение $g = 0$ не зависит от выбора единиц, то определяемое им геометриче-

---

[1]) Относительно свойств матриц, используемых здесь, см., например [45], гл. X, в частности, стр. 306 [или Гантмахер Ф. Р., Теория матриц, М.—Л., 1950. — *Прим. ред.*]. Неособый минор m-го порядка — это квадратная подматрица порядка m, определитель которой не равен нулю.

[2]) В случае когда c_{jm} — целые числа, это можно обобщить на другие октанты. Характер поведения на гиперплоскостях $Q_i = 0$ более сложен; его исследовал Riabouchinsky D., *Comptes Rendus*, **217** (1943), 220—223.

ское место одно и то же для всех $Q_1, \ldots, Q_m$; следовательно, соотношение (12) эквивалентно, например, зависимости

$$\varphi(\Pi_1, \ldots, \Pi_{r-m}) = g(1, \ldots, 1; \Pi_1, \ldots, \Pi_{r-m}) = 0.$$

Таким образом, теорема доказана.

Историческая справка. Имеются некоторые разногласия относительно авторства П-теоремы. Ваший[1]) получил этот результат в 1892 г., но он не сформулировал своих исходных допущений. Он указал использованный выше метод, но его рассуждения настолько загадочны, что никто не воспроизводил его доказательства. Букингем ([47], [48]) дал в 1914 г. первое доказательство П-теоремы, но только для частного случая, когда функцию f можно разложить в ряд Маклорена, и до недавних пор это было единственное общепринятое доказательство[2]). Недавно Рябушинский и А. Мартино-Лягард [52], разъяснив соображения Ваший, получили гораздо более общее доказательство[3]).

Приведенное здесь доказательство дает возможность более отчетливо выявить ограничения, накладываемые на величины α_i и Q_j и показать используемый матричный аппарат[4]).

§ 64. Обсуждение доказательства

Если предположить, что функцию f можно разложить в ряд Маклорена, то можно дать другое алгебраическое доказательство П-теоремы, понять которое, быть может, легче. Мы приведем здесь это доказательство и некоторые связанные с ним результаты, чтобы полнее разъяснить понятие *однородности по размерности.* Прежде всего отметим следующие очевидные следствия из теоремы Эйлера об однородных функциях.

Лемма 1. *Для функции $f(\mathbf{Q})$, зависящей от положительных величин $Q_1, \ldots, Q_m$, выполнение Эйлеровых условий однородности*

$$\frac{\partial f}{\partial Q_j} = \frac{\lambda_j f}{Q_j}, \tag{15}$$

[1]) Vaschy A., *Annales Télégraphiques,* 19 (1892), 25—28. Идеи Рябушинского получили развитие в ряде его работ (*L'Aerophile,* September, 1911; *Comptes Rendus,* 217 (1943), 205—208 и 225 (1947), 837—839).

[2]) Фактически Бриджмен ([46] стр. 16) поставил вопрос о том, нельзя ли рассматривать функции более общего вида. Функция $\alpha(\beta, M, \gamma)$ в определении Тейлора — Маккола из § 85 является безразмерной функцией, которую нельзя разложить в ряд Маклорена; см. также парадокс Ферри из § 16.

[3]) В первом издании [57] дано доказательство П-теоремы при самых общих предположениях. — *Прим. ред.*

[4]) См. также Langhaar H. L. [51] и данные там ссылки.

где λ_j — действительные постоянные, эквивалентно следующему соотношению:

$$f(\mathbf{Q}) = CQ_1^{\lambda_1} \dots Q_m^{\lambda_m}, \quad C = f(1, \dots, 1). \tag{15'}$$

Если Q_j однородны по размерности, как в формуле (2), *то однородна по размерности и функция f, и ее размерности относительно q_k есть $\lambda_1 b_{1k} + \dots + \lambda_m b_{mk} = \Lambda_k$.*

Для таких функций мы введем следующее определение.

Определение. Конечную сумму функций $f(\mathbf{Q})$, удовлетворяющую (15'),

$$\varphi(\mathbf{Q}) = f_1(\mathbf{Q}) + \dots + f_r(\mathbf{Q}) \tag{16}$$

будем называть *Q-полиномом.*

Лемма 2. *Если все члены $f(\mathbf{Q})$ в $\varphi(\mathbf{Q})$ одной и той же размерности Λ_k по любому q_k, то функция φ однородна по размерности.*

Действительно, выполнив подстановку (2), получим

$$\varphi(T_\alpha(\mathbf{Q})) = \varphi(\mathbf{Q}, \alpha) = \alpha_1^{\Lambda_1} \dots \alpha_n^{\Lambda_n} \varphi(\mathbf{Q}). \tag{17}$$

Простой пример $f_1 = Q_1$, $f_2 = Q_2$, $f_3 = -Q_1$ показывает, что обратное неверно, если функция φ не приведена к нормальному виду.

Мы будем говорить, что Q-полином *формально однороден*, если все его члены f_i имеют один и тот же вектор размерности $\mathbf{\Lambda} = (\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$. Очевидно, если функция φ формально однородна, то равенство $\varphi = 0$ не зависит от выбора единиц в смысле соотношения (5). Кроме того, оно эквивалентно безразмерному соотношению $1 + (f_2/f_1) + \dots + (f_r/f_1) = 0$, что тривиально доказывает П-теорему для Q-полиномов.

Многие уравнения физики формально однородны, подобно приведенным выше в примерах 1, 3, 4. Утверждали даже (хотя это неверно, см. § 65), что все настоящие физические уравнения *должны быть* однородны и, действительно, критерием однородности по размерности часто можно пользоваться в качестве удобного способа формальной проверки физических уравнений, если вы в них не вполне уверены. Однако в действительности дело обстоит значительно сложнее, и некоторые тонкие разграничения, которые здесь надо иметь в виду, лучше показать на примере. В связи с этим мы вновь рассмотрим пример 2 из § 61.

Если применить П-теорему к соотношению (6), не зависящему от выбора единиц и рассматривать v как Q_1, а t —

как q_2, то после некоторых преобразований получим соотношение [1])

$$\sqrt[3]{(1-\Pi)(\Pi+1)}+\sqrt[5]{1-\Pi}=0.$$

Это соотношение в отличие от соотношения (6) не только не зависит от выбора единиц, но и однородно по размерности, так как все входящие в него члены имеют размерность нуль по всем основным величинам. Несмотря на это, доказательство П-теоремы Букингема не применимо к соотношению (6).

Следуя Бриджмену [2]), мы можем рассмотреть также полиномиальное уравнение

$$\varphi(s,\ v,\ a,\ t)=v+v^2-2as-at=0. \tag{18}$$

И это уравнение, и соотношение (6) удовлетворяются в условиях примера 2; кроме того, функция φ есть Q-полином.

Однако уравнение (18) *не является* не зависящим от выбора единиц в смысле соотношения (5), и функция φ не формально однородная функция: подстановка $s\to\alpha s$, $t\to\beta t$ переводит уравнение (18) в следующее:

$$\frac{\alpha}{\beta}(v-at)+\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2(v^2-as)=0. \tag{18'}$$

Так как уравнение (18) справедливо в любой системе основных единиц («справедливо при любых единицах», хотя и зависит от выбора единиц), то уравнение (18′) есть тождество относительно величин α и β. Поэтому из уравнения (18′) следуют равенства: $v=at$ и $v^2=as$. Эти рассуждения можно обобщить следующим образом.

Теорема 3. Пусть $\varphi(\mathbf{Q})$ *есть Q-полином, и пусть соотношение* $\varphi(\mathbf{Q})=0$ *«справедливо при любых единицах». Тогда условия* $\varphi(\mathbf{Q})=0$ *эквивалентно системе формально однородных уравнений.*

Доказательство следует из формального рассмотрения тождества

$$\varphi(T_\alpha(\mathbf{Q}))=\sum\alpha_1^{\Lambda_{i1}}\dots\alpha_n^{\Lambda_{in}}\varphi_i(\mathbf{Q}),$$

где $\varphi_i(\mathbf{Q})$ — слагаемые функции φ, имеющие различные размерности $\Lambda_i=(\Lambda_{i1},\dots,\Lambda_{in})$.

Применив предыдущие рассуждения к ряду Маклорена, получим доказательство Букингема П-теоремы; по-видимому, оно

[1]) Это соотношение не получается из (6). — *Прим. ред.*

[2]) [46], стр. 42. Исследование уравнения (18) привело Бриджмена к мысли предложить «векторное исчисление» соотношений.

равным образом применимо к ряду Лорана и к действительному ряду Дирихле внутри областей сходимости.

Наконец, мы напомним свойство «абсолютной инвариантности относительной величины», введенное Бриджменом [1]). Согласно Бриджмену, функция переменных $q_1, \ldots, q_n$ обладает этим свойством, если она удовлетворяет функциональному уравнению

$$\frac{f(q_1', \ldots, q_n')}{f(q_1, \ldots, q_n)} = \frac{f(\alpha_1 q_1', \ldots, \alpha_n q_n')}{f(\alpha_1 q_1, \ldots, \alpha_n q_n)} \tag{19}$$

для всех положительных α_1, q_i и q_i' [$i = 1, \ldots, n$]).

Мы приходим к следующему результату.

Теорема 4. *Пусть $Q = f(q_1, \ldots, q_n)$ есть положительная величина, непрерывная по основным единицам q_i и удовлетворяющая уравнению* (19), *так что отношения ее числовых значений инвариантны относительно изменений основных единиц. Тогда Q должно удовлетворять соотношению* (2).

Доказательство. Пусть $q_1' = \sigma$, $\alpha_1 = \sigma^m$, а все остальные переменные равны 1. При помощи перестановки можно получить формулу (19) в виде

$$\lambda f(\sigma^m, 1, \ldots, 1) = f(\sigma^{m+1}, 1, \ldots, 1),$$

где $\lambda = f(\sigma, 1, \ldots, 1)/f(1, 1, \ldots, 1)$. Индукцией по m получаем для всех положительных и отрицательных целых m следующее равенство:

$$f(\sigma^m, 1, \ldots, 1) = \lambda^m f(1, 1, \ldots, 1). \tag{19'}$$

Отсюда, полагая $q_1 = 2^{m/n}$, $\sigma = \sqrt[n]{2}$ и $f(1, \ldots, 1) = C$, получаем выражения

$$f(q_1, 1, \ldots, 1) = C\lambda^m \text{ и } f(2, 1, \ldots, 1) = C\lambda^n.$$

Положим $a = \log_2[f(2, 1, \ldots, 1)/f(1, 1, \ldots, 1)] = n \log_2 \lambda$, так что $\lambda^m = 2^{ma/n}$; после подстановок получаем соотношение

$$f(2^{m/n}, 1, \ldots, 1) = C2^{ma/n} = C(2^{m/n})^a. \tag{20}$$

---

[1]) См. [23], стр. 21. Уравнение (19), очевидно, показывает, что *отношения* однородных величин инвариантны относительно замены основных единиц. Предположение, что q_i положительны, хотя и не упоминается, но также необходимо в доказательстве Бриджмена, поскольку он имеет дело с $\int dq_i/q_i$. И, действительно, отрицательные величины a_i обычно не имеют никакого физического смысла. Эти результаты распространил с дифференцируемых на непрерывные функции Martinot-Lagarde A., *Comptes Rendus*, 223 (1946), 136—137.

Но степени двойки с рациональными показателями образуют всюду плотное множество положительных действительных чисел. Следовательно, если f фактически непрерывна, если f не является неизмеримой и не является всюду разрывной функцией[1]), то для всех положительных q_1 получаем равенство $f(q_1, 1, \ldots, 1) = Cq^1$.

Повторив рассуждение для других индексов, мы приходим к утверждению теоремы[2]).

§ 65. Независимы ли физические законы от выбора единиц?

В § 61 мы рассматривали свойство независимости соотношений от выбора единиц как математическую гипотезу. Относительно ее физической применимости велись жаркие споры. Так, некоторые авторы позволяли себе истолковывать тот правдоподобный принцип, что «все единицы измерения[3]) пригодны», как приводящий к выводу, что при всех таких единицах получаются одни и те же универсальные физические законы. Так, Толмэн[4]) в 1914 г. утверждал: «основные сущности, из которых построена физическая вселенная, таковы, что из них можно построить миниатюрную вселенную, в точности подобную... нашей вселенной».

Легко видеть, что такой вывод не является логически необходимым, если вспомнить, что в некотором смысле все пространственно-временные системы координат равновозможны. Но геоцентрическая система, подобная той, что используется в астрономии Птолемея, не приводит к тем же физическим законам, что и гелиоцентрическая система.

Кроме того, такое истолкование неверно даже для единиц длины, массы и времени в механике[5]). Действительно, основное положение специальной теории относительности состоит в том,

---

[1]) Относительно контрпримеров всюду разрывных функций см. Hammel G., *Math. Annalen*, **60** (1905), 459—462. С помощью логарифмического преобразования уравнение (19) сводится к известному аддитивному функциональному уравнению. Легко показать, что, в силу уравнения (19), если функция f разрывна в одной точке, то она должна быть всюду разрывной. Относительно неизмеримости f см. Banach S., Théorie des Operations Linéaires, Warsaw, 1933, стр. 23.

[2]) Простое доказательство этой теоремы для дифференцируемых функций см. в [57]. — *Прим. ред.*

[3]) Относительно значения шкалы измерений см. Campbell N., Measurement and Calculation, 1928. Строго говоря, следует различать шкалы перечисления, порядковые шкалы, шкалы, в которых можно установить равенство разностей значений, и истинные линейные шкалы с нулем.

[4]) Tolman R. C., *Phys. Rev.*, **3** (1914), 244—255.

[5]) Конечно, можно сохранить предположение IV следующим образом: считать, по определению, основной единицей такую единицу измерения, для которой справедливо предположение IV; это может даже оказаться полезным.

что законы механики, одним из которых является основной закон силы

$$F = \frac{d\,(m_0 u/\sqrt{1-u^2/c^2})}{dt}, \qquad (21)$$

не являются независимыми от выбора единиц измерения длины и времени в отдельности, так как в них входит скорость света [1]).

В квантовой механике постоянная Планка h входит в формулу де-Бройля для длины волны частицы $\lambda = h/mv$ и в фотоэлектрическое уравнение $E = h\nu$; это еще более подчеркивает то обстоятельство, что не все физические законы однородны по размерности. Здесь h — универсальная постоянная, имеющая размерность действия ML^2/T (энергия × время). Другая размерная постоянная γ входит во всеобщий закон притяжения Ньютона [2]) $F = \gamma mm'/r^2$; другие такие постоянные входят в выражение для диаметра любой микрочастицы, и т. д. Таким образом, мы вынуждены безоговорочно признать, что *мы не знаем таких «основных единиц», по отношению к которым все известные нам физические законы не зависимы от выбора единиц* [3]). В действительности выбор некоторых единиц как основных (или первичных), а всех остальных как производных (или вторичных) является делом соглашения и не вызван физической необходимостью. Так, иногда оказывается удобным считать силу не зависящей от массы, длины и времени [4]).

Физические постоянные. В предшествующих утверждениях необходимо сделать существенную оговорку. Универсальность «универсальных постоянных» может оказаться не абсолютной. Так, до открытия Ньютоном тяготения величина g должна была, по-видимому, считаться универсальной постоян-

---

[1]) Независимый выбор единиц длины и времени возможен и в этом случае, если скорость света c рассматривать как физическую размерную постоянную. — *Прим. ред.*

[2]) Согласно Эддингтону (*Lond. Phys. Soc.*, 1918, стр. 91), практически природа заставляет нас единственным образом выбрать единицы длины, времени и массы так, чтобы было $\gamma = c = h = 1$. Ограниченные законы «гравитационного подобия» исследовал Laboretta, *Electrotecnica*, 1932, стр. 1629.

[3]) Другие примеры см. у Бриджмена [46], стр. 103. [По-видимому, речь идет о зависимости от единиц измерения способа записи физических законов, а не самих законов по существу. — *Прим. ред.*]

[4]) См. [46], стр. 65. В термодинамике мы имеем замечательный парадокс Рябушинского (там же, стр. 10), а также закон радиации Стефана — Больцмана $E/\text{площадь} = KT^4$. Еще больше проявляется искусственность понятия «основная единица» при рассмотрении электромагнитных единиц; см. Jeans J., Electricity and magnetism, Cambridge Univ. Press, 1941, стр. 14—15, а также Bryleński, *Comptes Rendus*, 215 (1942), 104.

ной (что до сих пор сказывается в выборе технической системы единиц). Далее, скорость $c = 1/\sqrt{K\mu}$ распространения электромагнитных волн рассматривалась Максвеллом [1]) не как универсальная постоянная, а как величина, зависящая от диэлектрической постоянной K и магнитной проницаемости данного вещества. По-видимому, преждевременно отказываться, как от безосновательных, от попыток, подобных предпринятым Толмэном (см. прим. 4) на стр. 133) и Эддингтоном [2]), вывести соотношения между универсальными постоянными из некоторых общих принципов.

§ 66. Инспекционный анализ

В ньютоновой континуальной механике можно производить любые изменения типа (1) *в масштабах длины, массы и времени*, чего нельзя сказать о релятивистской и квантовой механиках. И, по-видимому, можно быть уверенным, что законы ньютоновой механики достаточно точно описывают поведение реальных жидкостей в обычных условиях. Хотя подобные изменения масштаба могут существенно повлиять на такие свойства вещества, как плотность и вязкость, диапазон плотности и вязкости реальных жидкостей настолько велик, что это влияние обычно остается незаметным.

Выделенный выше курсивом принцип можно доказать не только экспериментально на моделях, но его можно также вывести теоретически из основных уравнений гидромеханики. Этот вывод основывается на простом мета-математическом принципе: *если какая-либо система математических уравнений инвариантна относительно некоторой группы, то то же самое справедливо для всех следствий из этих уравнений.*

Применительно к скалярным преобразованиям (1), указанным принципом фактически пользовались Фурье, Стокс и другие пионеры исследования анализа размерностей, чтобы проверить правильность своих рассуждений. Этот метод был отчетливо осознан Рэлеем, когда он ссылался на «подобие»; преимущества этого метода признавал также Бриджмен [3]), который писал: «Преимущество (анализа размерностей) в том, что он быстро приводит к результату, но... он не дает такой полноты информации, которую можно было бы получить с помощью...

[1]) Theory of electricity and magnetism, Oxford, 1881, статьи 784—787.

[2]) Eddington A., Relativity theory of protons and electrons, Cambridge Univ. Press, 1935; см. также [46], гл. VIII и Whittaker E. T., Spase and spirit, Edinburgh, 1946.

[3]) Rayleigh, *Phil. Mag.*, 34 (1892), 52 и 8 (1905), 66, а также *Nature* 95 (1915), 66; Bridgman [46], 17; см. также Schiffer L., *ZAMM*, 24 (1944), 289—293.

детального анализа» и «анализ размерностей с физической точки зрения не столь поучителен, как условие подобия».

Принцип «динамического подобия» для движений жидкости обычно формулируется следующим образом.

Определение. Два течения жидкости Φ и Φ′ называются *динамически подобными*, если их можно описать при помощи координатных систем [1]), в которых пространство, время и масса связаны друг с другом следующими соотношениями:

$$x_i' = \alpha x_i, \qquad t' = \beta t, \qquad m' = \gamma m. \tag{22}$$

Легко проверить, являются ли уравнения гидродинамической теории инвариантными относительно преобразований вида (22).

Именно это было сделано при доказательстве теоремы 2 из § 21. Из уравнений, подлежащих проверке, наиболее важны уравнения Навье — Стокса для *несжимаемой вязкой жидкости:*

$$\frac{Du_i}{Dt} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} = g_i + \nu\nabla^2 u_i, \qquad i = 1,\ 2,\ 3. \tag{23}$$

Было показано, что эти уравнения инвариантны при отсутствии свободной поверхности, *если* для величин ν и p/ρ (гидростатическое давление можно учесть согласно теореме 1 из § 21) масштабы выбраны так, что число Рейнольдса vd/ν из примера 5, § 62 сохраняется неизменным. (Относительно роли параметров, характеризующих данное вещество, таких, как ν и ρ, см. § 65; их роль аналогична той, которую играют K и μ в теории электромагнетизма, где $c = c_0/\sqrt{K\mu}$.)

В § 70—73 будут доказаны различные аналоги теоремы 2 из § 21 применительно к сжимаемому невязкому течению, сжимаемым струйным течениям, течениям с кавитацией и т. д. Но сначала мы рассмотрим инспекционный анализ вообще, для того чтобы лучше уяснить себе его отношение к традиционному анализу размерностей.

§ 67. Связь с теорией групп

Ясно, что математические уравнения можно проверить на инвариантность не только относительно «изменений масштаба», описываемых посредством соотношений (22), но и относительно многих других преобразований. Например, *все* уравнения физики инвариантны относительно переноса и поворота осей ко-

[1]) В действительности мы имеем в виду ньютоновы системы координат, в которых верны законы движения Ньютона. Поскольку предположение об их существовании ставит вопрос о возможности динамического подобия, в этом определении имеется нечто от порочного круга.

ординат — известный принцип, который весьма существен при математическом исследовании большинства физических задач. В некоторых частных случаях можно воспользоваться инвариантностью относительно конформных и афинных преобразований (см. § 74).

Вообще говоря, *инспекционный анализ применим к любой группе преобразований*[1]). Под группой преобразований мы разумеется, понимаем (см. прим. 1) на стр. 122) множество преобразований, содержащее тождественное и все обратные преобразования и произведения любых двух своих элементов.

Наше утверждение основывается на логической аксиоме, о которой шла речь в § 1, гипотеза (С) и в § 26, а именно: *если гипотезы теории инвариантны относительно группы G, то инвариантны относительно G и их следствия*[2]). Обратно, *множество всех взаимно однозначных преобразований, оставляющих без изменения какую-либо систему уравнений, образует группу.*

Самой важной группой в механике после «группы подобия» преобразований вида (22) является десятипараметрическая группа Галилея — Ньютона. Эта группа порождается трехпараметрической подгруппой S пространственных переносов

$$x_i' = x_i + c_i \qquad [i = 1, 2, 3]; \tag{24}$$

однопараметрической подгруппой T переносов отсчета времени

$$t' = t + c; \tag{25}$$

трехпараметрической подгруппой R поворотов пространства

$$x_i' = \sum a_{ik} x_k, \tag{26}$$

где $\|a_{ik}\|$ — наиболее общая квадратная ортогональная матрица третьего порядка, и трехпараметрической подгруппой M группы преобразований к *осям, движущимся* поступательно с постоянной скоростью

$$x_i' = x_i - b_i t. \tag{27}$$

Теперь легко проверить, что три закона движения Ньютона инвариантны относительно преобразований (24)—(27) и что эти

---

[1]) Это было высказано Ehrenfest [61], стр. 261, но не привлекло внимания, так как она не указала никаких приложений. Элементарные сведения о группах см. в [45], гл. VI; об ортогональных матрицах см. там же, гл. VIII. [См. также Курош А. Г., Теория групп, М.—Л., 1953; Мальцев А. И., Основы линейной алгебры, М.—Л., 1948. — *Прим. ред.*].

[2]) Это положение, хотя и широко используется математиками и физиками, редко формулируется явно; см., однако, Bouligand G., Théorie Générale des Groupes, Paris, 1935, стр. 3.

преобразования не изменяют определений таких физических параметров, как плотность, вязкость и т. д. (предполагается, что масса остается неизменной). Следовательно, *теоретическая механика Ньютона инвариантна как относительно группы Галилея — Ньютона*, так и относительно группы преобразований (22) динамического подобия. Этот принцип был подтвержден на опыте многими способами с очень большой точностью, за исключением тех случаев, когда скорости движения сравнимы со скоростью света [1]).

§ 68. Теория моделирования

Мы указали два основных преимущества инспекционного анализа: он дает нам возможность оправдать предположение IV анализа размерностей, позволяя проверить инвариантность уравнений, определяющих данную краевую задачу, относительно преобразований (1); а также позволяет рассматривать «подобие» не только такого простого вида, как (1). Инспекционный анализ имеет и третье преимущество: он дает в принципе рациональный метод проверки справедливости предположения III.

Хотя, как мы видели, предположения I, II и IV, по-видимому, в общем допустимы в механике жидкостей, с предположением III дело обстоит иначе. Кроме того, анализ размерностей не дает основания a priori решить вопрос о том, определяют ли переменные $Q_1, \ldots, Q_n$ величину Q_0 достаточно точно. Так, Бриджмен [2]) замечает вскользь, что этот кардинальный вопрос «не может быть разрешен философом на кафедре», а его можно решить только на основе физического опыта. Мы проиллюстрируем это затруднение большим экспериментальным материалом.

Для того чтобы проверить справедливость предположения III с помощью инспекционного анализа, в принципе можно действовать следующим образом. Пусть известно, что некоторое течение жидкости можно приближенно рассчитать, решив соответствующую *краевую задачу* в смысле § 1. Тогда можно попросту проверить инвариантность дифференциальных уравнений и краевых условий относительно преобразований некоторой группы (скажем, преобразований (22)). Если они инвариантны и краевая задача корректно поставлена, то предположение III справедливо.

Таким образом, инспекционный анализ имеет то преимущество, что он укладывается в общую схему теоретической гидро-

[1]) Кажущийся парадокс Дюбуа не является контрпримером; см. § 28.
[2]) [46], стр. 13—14; см. там же, стр. 50.

динамики. Основное ограничение, накладываемое на его применимость, обусловлено, как мы уже выяснили в гл. I—II, тем обстоятельством, что все еще слишком мало задач теоретической гидродинамики сведены к таким краевым задачам, корректность которых доказуема.

§ 69. Частный инспекционный анализ

Мы приведем сейчас пример, иллюстрирующий применение как инспекционного анализа, так и способы устранения затруднений, возникающих при этом.

Рассмотрим уравнения Навье — Стокса (23) для несжимаемой вязкой жидкости. Согласно Руарку [56] их можно привести к безразмерному виду следующим образом.

Пусть V, L и P соответственно скорость, длина и давление на модели, измеренные, по предположению, на границах течения жидкости. Если умножить уравнения (23) на L/V^2, чтобы придать этим уравнениям безразмерный вид, и ввести безразмерные переменные $u_i' = u_i/V$, $t' = Vt/L$, $x_i' = x_i/L$, $p' = p/P$ и безразмерные постоянные $\mathrm{Re} = VL/\nu$, $\mathrm{Fr} = V^2/Lg$ и $Q^* = 2P/\rho V^2$, то получим уравнения

$$\frac{Du_i'}{Dt'} = \frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla'^2 u_i' + \frac{1}{\mathrm{Fr}}\left(\frac{g_i}{g}\right) - \frac{Q^*\partial p'}{2\partial x_i'}, \tag{28}$$

где g_i/g — направляющие косинусы силы тяжести.

Безразмерные дифференциальные уравнения (28) находятся в замечательном соответствии с техническим опытом: мы можем отсюда вывести три наиболее важных ориентирующих правила, используемые при моделировании[1]). Так, мы видим, что если влияние силы тяжести, сжимаемости и кавитации незначительно, то модель должна иметь то же самое число Рейнольдса Re. Если не имеют значения сжимаемость, кавитация и вязкость, то моделировать надо по числу Фруда Fr.

Если можно пренебречь сжимаемостью и вязкостью, но надо учитывать гравитационные и кавитационные эффекты, то следует сохранять неизменным как число Fr, так и «число кавитации» Q^* (см. § 72, 78).

Инспекционный анализ делает правдоподобным предположение, что те или иные величины не играют роли как раз тогда, когда малы соответствующие коэффициенты в уравнениях (28),

[1]) См. [11], т. 2, гл. I, по поводу аналогичного вывода. Рецепт там таков: нужно сохранить неизменными «отношения сил»; ни величина Q^*, ни дифференциальные уравнения не рассматриваются в явном виде.

и, таким образом, по-видимому, он дает хорошее теоретическое обоснование моделирования по числам Fr, Re и Q^*.

Хотя только что приведенное рассуждение весьма содержательно и его стоит запомнить, оно страдает тем недостатком, что учитывалось только одно из трех фундаментальных уравнений гидромеханики, а именно уравнение движения. Итак, при этом остались в стороне уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\sum \frac{\partial (\rho u_k)}{\partial x_k}=0, \quad \text{или} \quad \operatorname{div} \mathbf{u}+\frac{D(\lg \rho)}{Dt}=0 \tag{29}$$

и уравнение состояния, которое можно записать в виде

$$\rho=f(p). \tag{30}$$

По этой причине мы будем называть его «частным инспекционным анализом», а соответствующий процесс, когда рассматриваются корректно поставленные условия, полностью определяющие течение, будем называть «полным инспекционным анализом».

§ 70. Инерциальное моделирование

На практике соображениями удобства экспериментирования и экономии часто руководствуются не только при выборе используемой жидкости (например, воздуха или воды), но и при выборе *размеров* моделей и *скорости* течения. Использование малых моделей для представления действительной картины бо́льшего масштаба обычно обосновывается с помощью анализа размерностей. В частности, обычно считают приближенно выполненным следующее условие.

Принцип инерциального моделирования. Безразмерные величины остаются без изменения при всех преобразованиях вида (22).

Так, если L — характерная длина и V — характерная скорость, то считают, что $V^{-1}\mathbf{u}(L^{-1}\mathbf{x})$ инвариантно по отношению к преобразованиям (22). В качестве следствия можно получить, исходя из значения величин на модели $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, действительную величину $\mathbf{v}(\mathbf{y})$ посредством соотношения

$$\mathbf{v}(\mathbf{y})=\frac{V'}{V}\,\mathbf{u}\left(\frac{L\mathbf{y}}{L'}\right),$$

где L' и V' — характерные длина и скорость полного масштаба. Подобным же образом допускают инвариантность относительно преобразований (22) коэффициента давления $C_p=(p-p_a)\big/\frac{1}{2}\rho v^2$, где p_a — давление в окружающей среде. В случае невязкой

жидкости из этого следует инвариантность коэффициента $C_D = D/\frac{1}{2}\rho V^2 A$, где D — лобовое сопротивление и A — площадь поперечного сечения. Заметим, однако, что неизменность величины $p/\frac{1}{2}\rho v^2$ не предполагается (см. § 72): анализ размерностей охватывает не все.

В действительности метод инспекционного анализа позволяет нам обойтись без всех предположений анализа размерностей. В частности, принцип инерциального моделирования можно строго *вывести* из стандартных уравнений для несжимаемой невязкой жидкости при условии отсутствия свободной поверхности.

Так, почти тривиальные выкладки показывают, что преобразования (22) в сочетании с преобразованиями $\mathbf{u}' = \alpha\mathbf{u}/\beta$, $\rho' = \gamma\rho/\alpha^3$ и $p' = (\gamma/\alpha\beta^2)p$ сохраняют неизменными как уравнения движения Эйлера и уравнение неразрывности, так и условие отсутствия вихрей $\nabla \times \mathbf{u} = 0$. Этим доказана следующая теорема.

Теорема 5. *В случае несжимаемого течения к уравнениям движения Эйлера, уравнению неразрывности и независимости и к краевым условиям Эйлера на твердых стенках применим принцип инерциального моделирования.*

Поскольку сформулированные выше условия определяют корректно поставленную краевую задачу (задачу Неймана, см. § 4) для стационарного течения при заданном p_a, отсюда вытекает следствие.

Следствие. Если справедливы уравнения Эйлера для безвихревого несжимаемого течения, то измеренное значение C_D не должно зависеть от размеров, скорости движения и плотности жидкости.

Фактически, ввиду парадокса Даламбера, этот результат менее интересен сам по себе, а интересен в качестве иллюстрации важного метода. Однако приведенные рассуждения равным образом применимы к течениям Жуковского (§ 8), к «следам»[1]) Кирхгофа (§ 39), к течениям Гельмгольца — Бриллюэна (§ 47) и к теории вихревых дорожек Кармана (§ 56). Принцип инерциального моделирования справедлив также для примитивной ньютоновой кинетической теории сопротивления воздуха и для квазиэмпирической формулы Эйлера, выражающей лобовое

[1]) То есть к каверна м. Заметим, что, поскольку теории течений Эйлера и Жуковского обратимы, в преобразованиях (22) можно рассматривать даже $\alpha < 0$.

сопротивление и подъемную силу в виде определенных интегралов [1]).

Если применить теорему 5 к ускоренному движению, возникающему из начального состояния покоя, то получим, что коэффициент присоединенной массы k, выражающийся отношением [2])

$$k = \frac{\text{Присоединенная масса}}{\text{Масса перемещенной жидкости}},$$

определяется *формой* рассматриваемого тела и не зависит от его размеров, от изменения ускорения и от плотности жидкости.

Экспериментально проверено, что принцип инерциального моделирования приближенно справедлив при режимах, соответствующих широкому диапазону изменений Re. Однако он сразу перестает быть справедливым, когда появляются перемежающиеся вихри и турбулентность в пограничном слое (например, вблизи $1/\mathrm{Re} \simeq 0{,}02$ и $0{,}00005$, см. § 28).

§ 71. Моделирование по числу Рейнольдса

Гораздо бо́льшее значение имеет применение метода инспекционного анализа к уравнениям для несжимаемых вязких жидкостей. В этом случае, в силу теоремы 2 из § 21, получается следующая теорема.

Теорема 6. *Если уравнения Навье — Стокса для несжимаемой вязкой жидкости вместе с условиями несжимаемости и прилипания на стенках приближенно определяют независящее от времени (статистически) течение жидкости, то справедливо соотношение* (8).

Действительно, соотношение (8) весьма убедительным образом было подтверждено экспериментально для самых разнообразных жидкостей и газов [3]). Как показано на рис. 8, разрушение течения Пуазейля в трубах для воздуха, воды и многих других жидкостей наступает при одном и том же числе Рейнольдса. При числах Маха, меньших $M = 0{,}3$, коэффициенты

[1]) Эти теории подробно рассмотрены в книгах Painlevé P., Leçons sur la résistance des fluides, Paris, 1930 и Cranz [5], гл. II.

[2]) *Присоединенная масса* тела в жидкости (гл. VI) — это разность между его инертной массой в жидкости и в вакууме.

[3]) См. § 25 и приведенные там ссылки на литературу, а также [54], стр. 16—17. Теорию разработал Стокс, [13], т. 3, стр. 17. Так как турбулентные движения обычных жидкостей и газов динамически подобны, по-видимому, маловероятно, чтобы турбулентность можно было связать с кинетической теорией иначе, чем косвенным образом — через вязкость. Подобным же образом были исследованы масла — Boswall R. O., Brierly J. C., *Proc. Inst. Mech. Eng.*, 122 (1932), 423—569.

лобового сопротивления сфер и цилиндров удовлетворяют соотношению (8) при одном и том же значении $K_D(\mathrm{Re})$ для всех жидкостей и при всех размерах и скоростях. Соответствующий результат справедлив для поверхностного трения пластинок, параллельных направлению потока.

При опытной проверке этих результатов необходимо соблюдать следующие две предосторожности, иначе не обеспечивается моделирование по числу Рейнольдса. Во-первых, нужно пользоваться моделями с аналогичной *шероховатостью поверхностей.* Это существенно влияет на появление турбулентного течения и на переход в пограничном слое от ламинарного течения к турбулентному. Так, вблизи $\mathrm{Re}_{\text{кр.}}$ можно намного уменьшить лобовое сопротивление сферы, увеличив должным образом шероховатость ее поверхности.

Во-вторых, *турбулентность свободного потока* должна оставаться той же самой [1]), особенно в аэродинамических трубах с замкнутым контуром. Найдено, что величина $\mathrm{Re}_{\text{кр.}}$ для сфер в аэродинамических трубах может увеличиваться в 2 раза в зависимости от турбулентности в трубе. Практическое решение этой проблемы будет описано в § 75.

Моделирование при бо́льших числах Рейнольдса в малом масштабе для больших скоростей в потоке — весьма нелегкая задача. Если использовать данную жидкость (воздух или воду) при атмосферных условиях, то всякое уменьшение диаметра модели должно компенсироваться увеличением в том же отношении скорости. В случае воздуха вязкость ν можно уменьшить, используя сжатый воздух, чтобы компенсировать уменьшение масштаба длин (ср. конец § 73 и § 75). К сожалению, мы не знаем ни одной жидкости, у которой значение ν было бы намного меньше, чем у воды, хотя многие жидкости имеют значительно большее значение ν. Поэтому только аэродинамические трубы [2]) дают экономичные модели по числу Рейнольдса при моделировании течений воды.

§ 72. Моделирование по числу Фруда и по числу кавитации

Инспекционный анализ можно также применять для получения законов моделирования явлений, в которых вязкость и

[1]) [3], стр. 431; см. также § 28, где приведены аналогичные результаты.

[2]) Об использовании аэродинамических труб вместо гидродинамических см. Keller C., Escher Wyss News (1940). Гелий в условиях сверхтекучести (§ 20), по-видимому, не подходит.

сжимаемость не играют существенной роли, но зато имеется «свободная поверхность», находящаяся под постоянным давлением. В частности, такие законы применимы к гравитационным волнам и к явлению кавитации в жидкостях. Справедлива следующая теорема.

Теорема 7. *В однородном гравитационном поле интенсивности* g *Эйлеровы уравнения движения и краевые условия на твердых границах, а также условие безвихренности и условие на «свободной поверхности»* $p = \text{const}$ *на границе сред жидкость — газ остаются неизменными при всех преобразованиях вида* (22), *оставляющих неизменным число Фруда* $\text{Fr} = V^2/gL$.

Доказательство. В силу теоремы 5, достаточно рассмотреть условие на свободной поверхности $p = \text{const}$, т. е. условие того, чтобы ∇p был нормален к ограничивающей поверхности. Для доказательства умножим уравнения (23) на L/V^2, как при выводе уравнений (28); мы получим безразмерное уравнение

$$\frac{Du_i'}{Dt'} = \frac{1}{\text{Fr}}\left(\frac{g_i}{g}\right) - \frac{\partial\left(p/\rho_0 V^2\right)}{\partial x_i'}. \tag{31}$$

Так как g_i/g есть i-й направляющий косинус интенсивности гравитационного поля и так как $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ определяет ∇p, то мы получаем динамическое подобие при пропорциональности *дифференциалов* коэффициента давления $2p/\rho_0 V^2$ (хотя и нет обычной пропорциональности величины $2p/\rho_0 V^2$), если только числа Fr будут равны.

Действительно, давление в окружающей среде P — это обычное локальное атмосферное давление p_a при моделировании гравитационных волн; при кавитационном моделировании нужно рассматривать также давление пара p_v. Это стало вполне ясно лишь в 1924 г., когда Тома [1]) ввел число кавитации

$$Q = \frac{P - p_v}{{}^1/_2 \rho V^2}. \tag{32}$$

[1]) Thoma D., Experimental research in the field of water Power, Trans. First World Power Conf., т. 2 (1924), 536—551; см. также Taylor H. B., Moody L. F., *Mech. Engineering*, 44 (1922), 633—640. Явно это высказал Lerbs H. на стр. 290 в Hydromechanische probleme des schiffsantriebs, Hamburg; см. также Rossell H. E., Chapman L. B., Principles of naval architecture, Soc. Nav. Arch. Marine Eng., New York, 1947, т. 2, стр. 177.

До этого считалось общепризнанным, что кавитация зависит от однородного безразмерного параметра

$$Q^* = \frac{P}{{}^1/_2 \rho V^2}, \tag{32'}$$

входящего в уравнение (28), что непосредственно следует из обычного анализа размерностей [1]).

Полный инспекционный анализ вместе с предположением, что кавитация возникает самопроизвольно при $p < p_v$, дает теоретическое обоснование для предпочтения формулы (32), ибо это предположение равнозначно постулированию разрывного уравнения состояния гл. III (14):

$$\rho = \rho_0, \qquad \text{если} \qquad p > p_v \tag{33}$$

и

$$\rho = \rho_v, \qquad \text{если} \qquad p = p_v.$$

При заданных P и p_v преобразование подобия (22) не изменяет соотношений (33) тогда и только тогда, когда оно не изменяет величину Q; доказательство аналогично доказательству теоремы 7.

При моделировании можно оставить неизменными *как* гравитационные, *так* и кавитационные члены при линейном масштабе $1 : \alpha$, взяв для скорости масштаб $1 : \sqrt{\alpha}$ (одно и то же g) и изменяя P таким образом, чтобы $P - p_v$ преобразовывалось в отношении $1 : \alpha$. Такое «моделирование по числу Фруда с понижением давления» сейчас широко используется при исследовании кавитации судовых винтов; может оказаться, что в таких моделях давлением пара нельзя пренебречь.

§ 73. Моделирование по числу Маха

Еще со времен опытов Робина (1747 г.) [2]) известно, что сопротивление снаряда не пропорционально квадрату скорости; следовательно, ни один способ инерциального масштабирования не является приемлемым. В обозначениях примера 3 из § 61 K_D заметно возрастает вблизи скорости звука. Поэтому K_D обычно табулировали как функцию v.

Было признано с самого начала, что причиной этого является сжимаемость воздуха, но более рациональное табулирование K_D как функции числа Маха M относится лишь ко времени первой

[1]) См. Lorain F., L'hèlice propulsive, Paris, 1932, стр. 129. Buckingham E., *Jour. Am. Soc. Naval Eng.*, 48 (1936), 147—148; Taylor D. W., The speed and power of ships, 3-е издание (1943), стр. 17.

[2]) По поводу истории вопроса см. Cranz [5], стр. 44—45

мировой войны. По логике вещей следует, что на дальность полета снарядов должна влиять не только плотность, что видно уже из выражения, определяющего K_D, но и температура воздуха. Однако явным образом это было впервые установлено, по-видимому, после первой мировой войны [1]).

Начиная примерно с 1935 г. в связи с созданием скоростных самолетов, аэродинамики стали интересоваться моделированием по числу Маха. Аэродинамические трубы, работающие при скорости 30 *м/сек*, можно использовать для воспроизведения условий полета со скоростями до 120 *м/сек*, если регулировать должным образом «эффективное» число Рейнольдса, но в них вовсе не сказывается влияние сжимаемости, которое проявляется при бо́льших скоростях. Поэтому начиная с 1935 г. аэродинамики и баллистики объединили свои усилия для изучения сжимаемых течений.

Впервые законы моделирования при сохранении числа Маха для политропного уравнения состояния вывел Ланжевен (см. прим. на этой стр.) при помощи «инспекционного анализа» уравнений движения *сжимаемого невязкого* газа без учета сил тяжести. Мы изложим результаты Ланжевена в несколько обобщенном виде.

Обращаясь снова к теореме 5, мы видим, что уравнение неразрывности инвариантно относительно всех преобразований подобия. Очевидно также, что любое заданное уравнение состояния (30) не изменяется ни при каком преобразовании, которое не изменяет p и ρ в соответствующих точках. Стало быть, оно не изменяется, в частности, при преобразованиях

$$x_i \to \alpha x_i, \quad t \to \alpha t \quad \text{если} \quad p, \rho, \mathbf{u} \quad \text{не изменяются.} \tag{34}$$

Инспекционный анализ указывает, что в уравнениях (23) слагаемые $Du_i/Dt = \sum u_k \, \partial u_i/\partial x_k + \partial u_i/\partial t$ и $\partial p/\rho \partial x_i$ при преобразовании (34) оба умножаются на $1/\alpha$. В результате получаем теорему.

Теорема 8. *Основные уравнения сжимаемого невязкого течения инвариантны относительно преобразования* (34).

Как показано в гл. I, эти основные уравнения не определяют корректно поставленную краевую задачу. По меньшей мере не-

[1]) Darrieus G., Mem. Art. Française, (1922), стр. 242; Hilliar H. W., *Dept. Sci. Res. Exp. Report RE* 142/19 (1919). Darrieus утверждает, что изменение дальности полета по этой причине может составлять примерно 1%. Работа Ланжевена, цитируемая ниже, напечатана сразу после работы Darrieus. Обоснованность моделирования по числу Маха показал Buckingham [48], стр. 275—278. О практической стороне дела см. Kent R. H., *Mech. Eng.*, September 1932.

обходимо добавить к ним уравнения Рэнкина — Гюгонио для ударных волн (§ 14). Однако поскольку последние уравнения можно вывести из уравнения состояния и законов сохранения массы, количества движения и энергии — а эти законы не изменяются при любом преобразовании вида (34), — то произойдет соответствующее изменение масштаба и в уравнениях Рэнкина — Гюгонио.

Закон изменения масштаба (34) справедлив также в теории упругости, теории пластичности и в динамике взрывных процессов [1]); он назван законом Кранца. Вообще он справедлив всегда, когда *тензор напряжений есть функция только от деформации* и не зависит от ее скорости, и всякий раз, когда в некотором напряженном состоянии освобождается определенная (в расчете на единицу объема) химическая энергия, как это требуется в условиях Чепмена — Жуге ([6], § 87). Любопытно, что этот закон справедлив также в *релятивистской* механике жидкостей.

Некоторые авторы хотели с помощью частного инспекционного анализа обосновать моделирование по числу Маха. Пусть $c = \sqrt{dp/d\rho}$ обозначает локальную скорость звука, и пусть C — скорость звука в невозмущенном потоке. Тогда, если пренебречь силами вязкости и тяжести и обозначить $M = V/C$, то соотношение (23) примет вид

$$\frac{du_i'}{dt'} + \sum \frac{u_k' du_i'}{dx_k} + \frac{1}{M^2}\left(\frac{c}{C}\right)^2 \frac{dp}{\rho\, dx_i} = 0. \tag{35}$$

Это дает следующее правдоподобное правило: *моделирование при постоянном числе Маха,* что для данного невозмущенного потока эквивалентно преобразованиям (34).

Однако в общем случае это правило оказывается *ложным,* если рассматривать различные газы (газы с разными уравнениями состояния (30)) или даже один и тот же газ, но при различных температурах и давлениях. Сравним, например, динамически подобные баротропные течения газа, у которых условия свободного потока отнесены к двум точкам на одной и той же адиабате. В силу уравнений (22), величины u и ρ всюду умножаются на постоянные множители. Поэтому в силу уравнения (35) $\operatorname{grad} p$ умножается на постоянный множитель $a(\alpha)$, где α — отношение плотностей в свободном потоке. Следовательно, если $F(\rho) = p(\rho) - p_f$ (p_f — давление в свободном потоке), то $F(\alpha\rho)/F(\rho) = a(\alpha)$ не зависит от ρ. Таким образом, для всех ρ, ρ', α справедливо $F(\alpha\rho)/F(\rho) = F(\alpha\rho')/F(\ ')$. Но это, очевидно,

[1]) См. [10], стр. 195; Schardin H., *Comm. Pure Appl. Math.*, **7** (1954), 223—243.

эквивалентно соотношению (16) из § 64. Отсюда по теореме 4 $F(\rho) = k\rho^{\gamma}$ и, следовательно, справедлива следующая теорема.

Теорема 9. *Для того чтобы модели сжимаемых потоков по числу Маха были динамически подобны при любых условиях в невозмущенном потоке, уравнение состояния должно иметь специальный вид*:

$$p = k\rho^{\gamma} + \text{const}. \tag{36}$$

При этом достаточно, чтобы γ было одним и тем же вдоль всех адиабатических кривых. Обобщение на неадиабатические течения очевидно.

Линеаризованное моделирование по Маху. Интересный пример аффинного моделирования дает линеаризованное приближение (Прандтля — Глауэрта) стационарного сжимаемого обтекания тонких тел, уже описанное в § 10—11.

Возмущение φ потенциала скоростей $U = ax + \varphi(x, y, z)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению [гл. I, (14*)]

$$(M^2 - 1)\varphi_{xx} = \varphi_{yy} + \varphi_{zz}, \quad M = \frac{a}{c}. \tag{37}$$

В *дозвуковом* случае ($M < 1$) оно эквивалентно уравнению $\nabla'^2 \varphi = 0$, где $\nabla'^2 = \partial^2/\partial x'^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ и $x' = x/\sqrt{1 - M^2}$, в силу чего этот случай *аффинным* преобразованием сводится к случаю *несжимаемого* потока.

В *сверхзвуковом случае* ($M > 1$) мы подобным же образом приводим это уравнение к виду

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \frac{1}{k^2}\left\{\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right\}, \quad [k = \sqrt{M^2 - 1}], \tag{37'}$$

что представляет собой *волновое* уравнение. В обоих случаях мы получаем *при соответствующих числах Маха аффинно подобные течения для аффинно эквивалентных моделей.* Случай звуковой скорости нужно рассматривать отдельно ([10], разд. 9.6).

Таким образом, для аффинно подобных течений изменение значения M эквивалентно (по крайней мере в теории [1])) изменению «отношения толщин». Следовательно, за исключением обыкновенного моделирования по Маху (35), можно изменять масштабы в двух перпендикулярных направлениях независимо друг от друга, так же как в теории длинных волн.

[1]) Учитывая § 12, к этой теории нужно относиться несколько критически. Она не рассматривает ударных волн.

Моделирование двойных соударений [1]). Преобразование расстояний и плотности в обратном отношении при сохранении скорости и температуры

$$x_i \to \alpha x_i, \quad t \to \alpha t, \quad u_i \to u_i, \quad \rho \to \rho/\alpha, \quad \theta \to \theta$$

обладает некоторыми необычными свойствами. В совершенном газе (§ 3,14) оно сохраняет неизменным удельную теплоемкость C_v, адиабатическую постоянную γ и скорость звука в окружающей среде C. Следовательно, оно сохраняет число Маха $M = V/C$.

Кроме того, это преобразование согласуется и с кинетической теорией газов, если рассматривать только двойные соударения молекул. Следовательно, оно сохраняет неизменными вязкость μ, проводимость $\varkappa$, а среднюю длину свободного пробега молекулы λ изменяет в отношении $1 : \alpha$. Значит, оно сохраняет также число Рейнольдса $\mathrm{Re} = VL\rho/\mu$, число Прандтля $\mathrm{Pr} = C_p\mu/\varkappa$ и число Кнудсена λ/L. Таким образом, оно пригодно для моделирования сжимаемости, явлений ударных волн, явлений вязкости, повышения температуры вследствие нагрева пограничного слоя и явлений в разреженном газе (большая средняя длина свободного пробега).

Наконец, данное преобразование сохраняет все вторичные процессы химической кинетики, следовательно, оно пригодно для моделирования многих явлений, рассмотренных в § 34, которые не укладываются в рамки механики континуума. С другой стороны, оно имеет то большое преимущество, что позволяет воспроизводить путем моделирования многие аэротермодинамические явления, протекающие в верхних слоях атмосферы, при испытаниях на моделях небольших размеров вблизи поверхности земли.

§ 74. Асимптотическое изменение масштаба

Аффинное моделирование — как и в теории тонких тел — можно формально рассматривать в рамках анализа размерностей, приписывая разные «размерности» длинам в разных направлениях [2]).

Однако гораздо более действенным является метод инспекционного анализа, который показывает, что такой «анализ размерностей» обычно равносилен особой *теории возмущений*, т. е. асимптотическому инспекционному анализу.

[1]) Неопубликованная работа автора и Эккермана из AVCO Corp.

[2]) См. Williams W., *Phil. Mag.*, **34** (1892), 234—271; Moon P., Spencer D. E., *J. Franklin Inst.*, **248** (1949), 495—522. Часто методы возмущений сами не могут быть строго обоснованы.

Мы рассмотрели случай линеаризованного моделирования по числу Маха. Сейчас мы приведем несколько примеров применения той же идеи.

Быть может, наиболее важным примером служат уравнения *пограничного слоя* Прандтля для ламинарного течения вблизи гладкой твердой границы (§ 27). Так, стационарное плоское течение в пограничном слое определяется [гл. II (14)] уравнениями

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\quad \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \tag{38}$$

и краевыми условиями $u(x,0)=0$, $u(x,\infty)=u_\infty$.

Эти уравнения, выведенные в приближении, когда толщина пограничного слоя считается бесконечно малой, инвариантны относительно группы аффинных преобразований вида

$$x\to\beta^2 x,\quad y\to\beta y,\quad u\to u,\quad v\to\beta^{-1}v, \tag{39}$$

а также относительно группы, определяющей моделирование по числу Рейнольдса.

Другой пример дает теория безвихревых гравитационных волн в мелких водоемах с медленно изменяющейся глубиной h. В самом грубом приближении средняя скорость частицы $u(x,t)$ в этих «волнах на мелководье» для двумерного движения [58, разд. 2.2] удовлетворяет уравнению

$$u_{tt}=g(hu)_{xx}. \tag{40}$$

Частный инспекционный анализ показывает, что уравнение (40) инвариантно относительно преобразования

$$t\to\beta t,\quad h\to\beta^{-2}h \tag{41а}$$

при любом $\beta>0$. Так как уравнение (40) однородно и линейно, то оно инвариантно также относительно преобразований

$$u\to\delta u+\varepsilon \quad \text{при любых} \quad \delta>0 \quad \text{и} \quad \varepsilon. \tag{41б}$$

Как уже было отмечено в § 15, волны на мелководье можно представить более точно уравнениями политропного течения при $\gamma=2$. Из сказанного в § 73 следует, что они инвариантны при всех изменениях масштаба вида

$$\mathbf{x}\to\alpha\mathbf{x},\quad t\to\alpha t,\quad \mathbf{u}\to\mathbf{u},\quad \rho\to k\rho. \tag{41в}$$

В гл. V мы покажем, как с помощью таких групп можно получать в явном виде частные решения краевых задач.